解答例

STEP III 2017、第 10 問

力学 ・ 回転する剛体

> **STEP III 2017、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q10

鍵となる考え方

粒子が滑らない間は、棒と粒子は一つの剛体（rigid body）として蝶番（hinge）のまわりを一体となって回転する。したがってエネルギー保存則（conservation of energy）からただちに $\dot{\theta}$ が得られ、それを微分すれば $\ddot{\theta}$ が得られる。このとき粒子は P を中心とする円周上を動くので、その加速度はおなじみの動径方向成分と横断方向成分（radial and transverse components）をもつ。粒子だけに対してニュートン（Newton）の運動の第二法則（Newton's second law）を立て、棒に平行な方向と垂直な方向に分解すれば、摩擦力（friction）と垂直抗力（normal reaction）が求まる。摩擦力が抗力の μ 倍に達したとき、滑りが始まる。

解答

エネルギーの式

粒子を質点（point mass）とみなし、蝶番はなめらかであるとする。一様な棒の端 P のまわりの慣性モーメント（moment of inertia）は $\frac{1}{3}m(3a)^2 = 3ma^2$ であり、P から距離 ℓ にある粒子は $m\ell^2$ だけ寄与する。滑りがない間、この系は角速度（angular speed）$\dot{\theta}$ で P のまわりを回転する剛体であり、その運動エネルギー（kinetic energy）は

$$\tfrac{1}{2}\left(3ma^2 + m\ell^2\right)\dot{\theta}^2.$$

である。棒が角 θ だけ回転したとき、棒の中心（P から距離 $\frac{3}{2}a$）は $\frac{3}{2}a\sin\theta$ だけ下がり、粒子は $\ell\sin\theta$ だけ下がる。蝶番からの抗力は仕事をしない（作用点が固定されているからである）。また、摩擦力と垂直抗力は系の内力であり、滑りがなければ全体と

して仕事をしない。静止状態から始まるので、エネルギー保存則より

$$\tfrac{1}{2}m\left(3a^2+\ell^2\right)\dot{\theta}^2 = mg\left(\tfrac{3}{2}a+\ell\right)\sin\theta,$$

が成り立ち、両辺に $2/m$ を掛ければ

$$(3a^2+\ell^2)\dot{\theta}^2 = g(3a+2\ell)\sin\theta,$$

となって、求める式が得られる。

角加速度

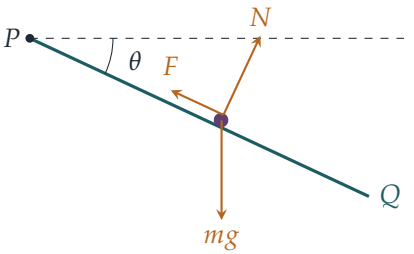
t で微分すると

$$2(3a^2+\ell^2)\dot{\theta}\,\ddot{\theta} = g(3a+2\ell)\cos\theta\,\dot{\theta}.$$

$t>0$ では $\dot{\theta}\neq 0$ であるから、$2\dot{\theta}$ で割ることができる（$t=0$ での結果は連続性から従うし、P のまわりの力のモーメントを考えて直接求めることもできる）：

$$\ddot{\theta} = \frac{g(3a+2\ell)\cos\theta}{2(3a^2+\ell^2)}.$$

粒子にはたらく力



棒は水平から下向きに角 θ をなしている。棒は粒子に対し、棒に垂直な垂直抗力 N（粒子は棒の上に載っているので、棒から離れる向き）と、棒に沿った摩擦力 F を及ぼす。F は P に向かう向きにはたらくとする。粒子は P を中心とする半径 ℓ の円周上を動くので、その加速度は、棒に垂直で θ が増加する向き（下向き、すなわち棒の上面から離れる向き）の成分 $\ell\ddot{\theta}$ と、棒に沿って P に向かう成分 $\ell\dot{\theta}^2$ をもつ。

棒に垂直で θ が増加する向きには、重力の成分は $mg\cos\theta$ であり、N は逆向きにはたらく：

$$mg\cos\theta - N = m\ell\ddot{\theta}.$$

棒に沿って P に向かう向きには、重力の成分は $-mg\sin\theta$ である（重力は粒子を P から遠ざける向きに引く）：

$$F - mg\sin\theta = m\ell\dot{\theta}^2.$$

垂直抗力

上で求めた $\ddot{\theta}$ を用いると

$$N = mg\cos\theta - m\ell\ddot{\theta} = mg\cos\theta\left(1 - \frac{\ell(3a+2\ell)}{2(3a^2+\ell^2)}\right)$$
$$= mg\cos\theta\,\frac{6a^2+2\ell^2-3a\ell-2\ell^2}{2(3a^2+\ell^2)} = \frac{3mga(2a-\ell)\cos\theta}{2(3a^2+\ell^2)}.$$

$\ell < 2a$ であるから因数 $2a-\ell$ は正であり、θ が鋭角ならば $\cos\theta > 0$ である。よって $N > 0$ である。特に、θ が鋭角である間、垂直抗力は 0 でなく、粒子は棒と接触し続ける。

滑り始める点

第二の運動方程式とエネルギーの式から

$$F = mg\sin\theta + m\ell\dot{\theta}^2 = mg\sin\theta\left(1 + \frac{\ell(3a+2\ell)}{3a^2+\ell^2}\right)$$
$$= mg\sin\theta\,\frac{3a^2+3a\ell+3\ell^2}{3a^2+\ell^2} = \frac{3mg(a^2+a\ell+\ell^2)\sin\theta}{3a^2+\ell^2}.$$

これは $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ で正であるから、仮定したとおり摩擦力は確かに P に向かってはたらく。摩擦がなければ、粒子は棒に沿って外側へ滑っていってしまう。

考えてみよう 滑りの条件が不等式ではなく $F = \mu N$ となるのはなぜか？

粒子が棒に張り付いている間、摩擦は μN までの任意の大きさの力を供給できるので、$F \le \mu N$ が必要である。$\theta = 0$ では $F = 0 < \mu N$ である。θ が増加すると、F は（$\sin\theta$ のように）増加し、N は（$\cos\theta$ のように）減少するので、$\tan\theta$ の正の定数倍である F/N は単調に増加する。粒子は、初めて $F = \mu N$ となる角で滑り始める寸前の状態になる：

$$\frac{3mg(a^2+a\ell+\ell^2)\sin\theta}{3a^2+\ell^2} = \mu\,\frac{3mga(2a-\ell)\cos\theta}{2(3a^2+\ell^2)}.$$

$3mg/(3a^2+\ell^2)$ を約し、$\cos\theta \neq 0$ で割ると

$$\tan\theta = \frac{\mu a(2a-\ell)}{2(\ell^2+a\ell+a^2)},$$

となり、求める式が得られる。

$\ell > 2a$ の場合

N の式は、粒子が棒と一体となって動くという仮定のもとで導いたものである。$\ell > 2a$ ならば、この式は $\theta = 0$ で $N < 0$ を与えるが、これはありえない。棒は粒子を押すこ

とはできても、引くことはできないからである。したがって、手を離した瞬間でさえ、粒子は棒と一体となって動くことはできない。

実際に何が起こるかを見るために、棒だけを考える。手を離した瞬間に P のまわりの力のモーメントを考えると

$$3ma^2\,\ddot{\theta} = mg\cdot\tfrac{3}{2}a \quad\Longrightarrow\quad \ddot{\theta} = \frac{g}{2a},$$

であるから、粒子の真下にある棒上の点は下向きの加速度 $\ell\ddot{\theta} = \frac{\ell}{2a}g$ で動き始める。これは $\ell > 2a$ のとき g より大きい。棒は、粒子が自由落下するよりも速く落ちていくのである。よって、手を離した瞬間に粒子は棒から離れ（両者の間の抗力は 0 である）、重力のもとで自由落下を始め、棒は単独で振り下ろされていく。

検算

- 系全体について P のまわりの力のモーメントを考えると $(3ma^2 + m\ell^2)\ddot{\theta} = mg\cos\theta\,(\frac{3}{2}a + \ell)$ となり、エネルギーの式を微分して得たものと同じ $\ddot{\theta}$ が得られる。
- 境界の場合 $\ell = 2a$ は両方の描像と整合する。手を離した瞬間に $N = 0$ であり、距離 $2a$ にある棒上の点はちょうど加速度 g で動き始める。
- $a = \ell = 1$、$\mu = 1$ とすると、滑り始める角は $\tan\theta = \frac{1}{6}$ を満たし、その角で上の式から $F/N = 6\tan\theta = 1 = \mu$ となる。N と F の式は、運動を数値的に追跡し、粒子の位置から加速度を直接計算することにより、コンピュータでも確認した。

よくある間違い

- 蝶番のまわりではなく、中心のまわりの慣性モーメント $\frac{1}{12}m(3a)^2$ を用いてしまう。長さ L の棒の端のまわりの慣性モーメントは $\frac{1}{3}mL^2$ である。
- 摩擦の式で向心力の項 $m\ell\dot{\theta}^2$ を忘れてしまう。分子が a^2 ではなく $a^2 + a\ell + \ell^2$ になるのは、この項のためである。
- 垂直方向の式で $\ell\ddot{\theta}$ の符号を間違える。棒は粒子から離れる向きに加速しているので、N は $mg\cos\theta$ より大きいのではなく小さい。

STEP のその先へ

最後の小問は古典的な意外な事実である。蝶番で留められて倒れていく棒の上の点は、g より大きな加速度をもちうる。倒れていく定規の端近くに置いた硬貨（あるい

は倒壊する煙突）が置き去りにされるのはこのためである。N や F のような拘束力（constraint forces）を求める体系的な方法は、運動方程式を極座標（polar coordinates）で書くことであり、のちに学ぶラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）では、拘束力をまったく使わずに運動を求める方法が示される。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の回転とこうした極座標での加速度を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。