解答例

STEP III 2017、第 1 問

純粋数学 ・ 望遠鏡型級数による評価

> **STEP III 2017、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q1

鍵となる考え方

(i) の恒等式（identity）は、二項係数（binomial coefficient）の逆数それぞれを、定数と隣り合う項の**差**の積として表すものである。そのため和は隣り合う項が次々に打ち消し合い、両端だけが残る（telescoping）。(ii) では、$1/n^3$ の和を直接求めるのは難しいが、二項係数の逆数の和ならば求められる。$\binom{n+1}{3}$ と $\binom{n+2}{5}$ は n の多項式であり、それぞれ n^3 と n^5 の定数倍のようにふるまう。そこで、(i) を用いて正確に和を求められる式で $1/n^3$ を上下からはさみ込む。

解答

小問 (i)

$\binom{m}{k} = \dfrac{m!}{k!\,(m-k)!}$ と書く。すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{\binom{n+r-1}{r}} - \frac{1}{\binom{n+r}{r}} &= \frac{r!\,(n-1)!}{(n+r-1)!} - \frac{r!\,n!}{(n+r)!} \\ &= \frac{r!\,(n-1)!}{(n+r)!}[(n+r)-n] = \frac{r\cdot r!\,(n-1)!}{(n+r)!}\end{aligned}$$

となる。ここで $(n+r)! = (n+r)\,(n+r-1)!$ と $n! = n\,(n-1)!$ を用いて、共通因数 $r!\,(n-1)!/(n+r)!$ をくくり出した。両辺に $\frac{r+1}{r}$ を掛けると

$$\frac{r+1}{r}\left(\frac{1}{\binom{n+r-1}{r}} - \frac{1}{\binom{n+r}{r}}\right) = \frac{(r+1)!\,(n-1)!}{(n+r)!} = \frac{1}{\binom{n+r}{r+1}}$$

を得る。$(n+r)-(r+1) = n-1$ だからである。これが求める恒等式である。

和について。$a_n = 1/\binom{n+r-1}{r}$ とおくと、恒等式は $1/\binom{n+r}{r+1} = \frac{r+1}{r}(a_n - a_{n+1})$ と書ける。$n = 1$ から N まで和をとると、最初と最後の項以外はすべて打ち消し合う：

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\binom{n+r}{r+1}} = \frac{r+1}{r}(a_1 - a_{N+1}) = \frac{r+1}{r}\left(1 - \frac{1}{\binom{N+r}{r}}\right),$$

ここで $a_1 = 1/\binom{r}{r} = 1$ を用いた。$N \to \infty$ のとき（$r \geq 1$ ならば）$\binom{N+r}{r} \geq N + r \to \infty$ であるから、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{n+r}{r+1}} = \frac{r+1}{r}$$

である。

導かれる結果。$r = 2$ とすると、$n = 1$ からの和は $\frac{3}{2}$ である。$n = 1$ の項は $1/\binom{3}{3} = 1$ であるから、

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\binom{n+2}{3}} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

小問 (ii)

第 1 の不等式。$n \geq 3$ のとき

$$\frac{1}{\binom{n+1}{3}} = \frac{3!}{(n+1)n(n-1)} = \frac{3!}{n^3 - n} > \frac{3!}{n^3}$$

である。$0 < n^3 - n < n^3$ だからである（左側の不等式は $n \geq 2$ から従う）。

第 2 の不等式。$\binom{n+1}{3} = \frac{1}{6}n(n^2-1)$ であり、$\binom{n+2}{5} = \frac{1}{120}(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2) = \frac{1}{120}n(n^2-1)(n^2-4)$ である。よって

$$\frac{20}{\binom{n+1}{3}} - \frac{1}{\binom{n+2}{5}} = \frac{120}{n(n^2-1)} - \frac{120}{n(n^2-1)(n^2-4)} = \frac{120\,(n^2-5)}{n(n^2-1)(n^2-4)}.$$

$n \geq 3$ のとき因数 n、n^2-1、n^2-4 はすべて正であるから、これが $120/n^3 = 5!/n^3$ より小さいことは

$$n^2(n^2-5) < (n^2-1)(n^2-4), \quad \text{すなわち} \quad n^4 - 5n^2 < n^4 - 5n^2 + 4$$

と同値であり、これは成り立つ。

考えてみよう (i) のどの和が必要で、それらはどこから始まるか？

必要なのは $\sum_{n\geq 3} 1/\binom{n+1}{3}$ と $\sum_{n\geq 3} 1/\binom{n+2}{5}$ である。前者では $m = n-1$ とおくと $\sum_{m\geq 2} 1/\binom{m+2}{3} = \frac{1}{2}$ となり、これはちょうど (i) で導いた結果である。後者では $m = n-2$ とおくと $\sum_{m\geq 1} 1/\binom{m+4}{5}$ となり、これは (i) で $r = 4$ とした場合であるから、値は $\frac{5}{4}$ である。

ここに現れる級数（series）はすべて収束（converge）する（いずれも正項級数であり、不等式そのものが示すように収束する級数で上から抑えられている）。収束する級数どうしの狭義の不等式（strict inequality）を項ごとに足し合わせると、やはり狭義の不等式が得られる。正の差の和は少なくともその第 1 項以上であり、第 1 項は正だからである。$T = \sum_{n\geq 3} 1/n^3$ とおく。

上からの評価。第 1 の不等式を $n \geq 3$ について足し合わせると

$$6T < \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\binom{n+1}{3}} = \frac{1}{2}, \qquad \text{よって} \qquad T < \frac{1}{12}.$$

下からの評価。第 2 の不等式を $n \geq 3$ について足し合わせると

$$120\,T > 20 \cdot \frac{1}{2} - \frac{5}{4} = \frac{35}{4}, \qquad \text{よって} \qquad T > \frac{35}{480} = \frac{7}{96}.$$

最後に、$\sum_{n\geq 1} 1/n^3 = 1 + \frac{1}{8} + T$ であり、$1 + \frac{1}{8} = \frac{108}{96}$ である。したがって

$$\frac{108+7}{96} = \frac{115}{96} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \frac{108}{96} + \frac{8}{96} = \frac{116}{96}$$

となり、示すべきことが示された。

検算

- $n = r = 1$ で恒等式を確かめる：$1/\binom{2}{2} = 1$ であり、$2\,(1/\binom{1}{1} - 1/\binom{2}{1}) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ である。
- $r = 1$ のとき和は $\sum 1/\binom{n+1}{2} = \sum \frac{2}{n(n+1)} = 2$ となる。これはおなじみの打ち消し合う和であり、$\frac{r+1}{r} = 2$ と一致する。
- 数値的には $\sum 1/n^3 \approx 1.20206$ であり、$\frac{115}{96} \approx 1.19792$、$\frac{116}{96} \approx 1.20833$ であるから、評価は確かに成り立ち、値を約 0.01 の範囲に絞り込んでいる。

よくある間違い

- 添字をずらした後の開始位置を間違える：$\sum_{n\geq 3} 1/\binom{n+1}{3}$ は $\binom{4}{3}$ から始まり、これは (i) で導いた和の $n = 2$ の項であって、$n = 1$ の項ではない。
- 不等式でカバーされない $n = 1, 2$ の項 $1 + \frac{1}{8}$ を足し忘れる。

STEP のその先へ

数 $\sum 1/n^3$ は $\zeta(3)$ であり、アペリーの定数（Apéry's constant）と呼ばれる。$\sum 1/n^2 = \pi^2/6$ とは異なり、閉じた形（closed form）の表示は知られていない。アペリー（Apéry）

が 1978 年にこれが無理数（irrational）であることを証明した際には、ここで扱ったものとよく似た、速く収束する級数が用いられた。級数を打ち消し合う和と比較することや、不等式を項ごとに足し合わせることは、大学最初の解析学（analysis）の講義における標準的な道具である。収束と比較判定法（comparison test）を丁寧に扱ったものとしては、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門書）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。