解答例

STEP II 2017、第 9 問

力学 ・ 摩擦と剛体

> **STEP II 2017、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q9

鍵となる考え方

各円柱は剛体（rigid body）であり、力を受けるのは板と床の 2 か所だけである。したがって、中心まわりのモーメント（moment）をとるのが自然な第一歩である。2 つの垂直抗力（normal reaction）は中心を通るので、残るのは 2 つの摩擦力（frictional force）だけであり、それらは等しくなければならない。その後は、円柱と板それぞれについて力を分解し、接点での摩擦の法則 $G \leq \frac{1}{2}R$ と $F \leq \frac{1}{2}N$ を当てはめればよい。幾何学的な関係によって θ を a と r に結びつけるのは、最後の段階である。

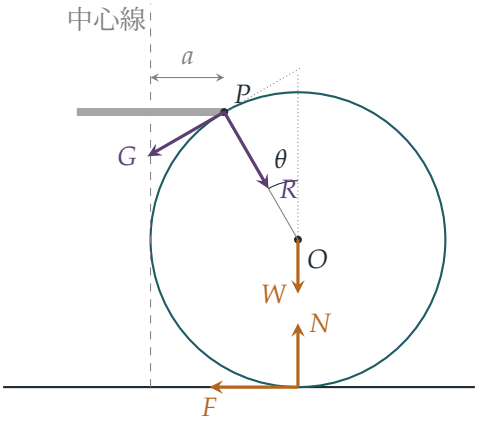
解答

モデルと設定。 断面を、半径 r の 2 枚の円板と 1 本の水平な棒とみなし、接触はすべて粗い（rough）とする。円柱どうしの間隔は無視できるので、それぞれの中心は対称軸である鉛直線の左右に、水平距離 r だけ離れた位置にある。板の幅は $2a < 2r$ なので、板はその 2 本の長い縁で円柱の内側上部に載っている。対称性より、右側の円柱だけを考えればよい。

板が円柱に接する点を P とする。P における接線は水平な板と角 θ をなすので、P への半径は鉛直方向と角 θ をなす。円柱にはたらく力は次のとおりである。

- 重さ W。中心 O にはたらく。
- 床では、上向きの垂直抗力 N と摩擦力 F（板が円柱を外向きに押すので、中心線に向かう向きにはたらく）。
- P では、PO 方向の垂直抗力 R と、接線方向で下向きかつ内向きの摩擦力 G。

ニュートン（Newton）の第 3 法則（third law）により、板は OP 方向（上向きで、中心線から離れる向き）に R を受け、接線方向で上向きかつ外向きに G を受ける。



P を通る点線が接線である。水平方向には、P は中心 O より $r\sin\theta$ だけ内側にあり、O は中心線から距離 r のところにある。

小問 (i)

円柱についての O まわりのモーメント。W、N、R はすべて O を通る。2 つの摩擦力はどちらも円に接する向きなので、それぞれのモーメントは（力）$\times r$ であり、互いに逆向きに回そうとする。F は下端で内向き、G は P で下向きかつ内向きである。したがって

$$Fr = Gr \quad \Longrightarrow \quad G = F.$$

円柱について水平方向に分解する（外向きを正とする）。R の水平成分は外向きに $R\sin\theta$、G の水平成分は内向きに $G\cos\theta$ であり、床の摩擦力 F は内向きにはたらくので

$$R\sin\theta - G\cos\theta - F = 0.$$

$G = F$ とすると、これは

$$R\sin\theta = F(1+\cos\theta),$$

となり、示すべき式が得られた。

導かれる不等式。板との接点では滑りが起こらないので、そこでの摩擦は $G \le \frac{1}{2}R$、すなわち $F \le \frac{1}{2}R$ を満たす。すると

$$R\sin\theta = F(1+\cos\theta) \le \tfrac{1}{2}R(1+\cos\theta),$$

となり、$\frac{1}{2}R > 0$（板は円柱を押している）で割ると $2\sin\theta \le 1+\cos\theta$ を得る。

小問 (ii)

板について鉛直方向に分解する。各縁は R を受け、その上向き成分は $R\cos\theta$ である。また接線方向上向きに $G = F$ を受け、その上向き成分は $F\sin\theta$ である。よって

$$2(R\cos\theta + F\sin\theta) = kW.$$

小問 (i) より $R = \dfrac{F(1+\cos\theta)}{\sin\theta}$ なので

$$R\cos\theta + F\sin\theta = \frac{F\left[(1+\cos\theta)\cos\theta + \sin^2\theta\right]}{\sin\theta} = \frac{F(1+\cos\theta)}{\sin\theta},$$

となる。ここで $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ を用いた。したがって

$$\tfrac{1}{2}kW = \frac{(1+\cos\theta)}{\sin\theta}F.$$

（板にはたらく水平方向の力は対称性により打ち消し合い、モーメントも同様である。）

円柱について鉛直方向に分解する。板からの反力は $R\cos\theta + G\sin\theta = \frac{1}{2}kW$ だけ下向きに押すので

$$N = W + \tfrac{1}{2}kW = \left(\frac{2}{k} + 1\right)\tfrac{1}{2}kW = \left(1 + \frac{2}{k}\right)\left(\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)F.$$

これが求める式である。（これは、床が全体の重さ $2W + kW$ の半分を支えるという当然の事実にすぎない。）

床で滑らない条件。条件は

$$F \le \tfrac{1}{2}N.$$

である。N の式から

$$\frac{N}{F} = \left(1 + \frac{2}{k}\right)\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}.$$

小問 (i) より $\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \ge 2$ である。鋭角 θ に対して $\sin\theta > 0$ だからである。また $k > 0$ より $1 + \frac{2}{k} > 1$ である。よって $N/F > 2$、すなわち $F < \frac{1}{2}N$ である。したがって、板が滑らなければ床での条件は自動的に成り立ち、θ に新たな制約は課されない。

考えてみよう 2つの接点はどちらも同じ摩擦力 F を受けているのに、なぜ床との接点の条件は自動的に満たされるのか？

床のほうが強く押しているからである。R と N の式を比べると、床は円柱自身の重さも支えているので $N = \left(1 + \frac{2}{k}\right)R > R$ となる。両方の接点で摩擦力が同じで、床での垂直抗力のほうが大きいので、先に滑るのは常に板との接点である。

小問 (iii)

小問 (i) の不等式を変形して 2 乗する。両辺とも正なので、2 乗しても不等号の向きは変わらない。

$$4\sin^2\theta \le (1+\cos\theta)^2 \iff 4(1-\cos\theta)(1+\cos\theta) \le (1+\cos\theta)^2.$$

$1+\cos\theta > 0$ で割ると $4-4\cos\theta \le 1+\cos\theta$、すなわち $\cos\theta \ge \frac{3}{5}$ を得る。θ は鋭角なので

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} \le \sqrt{1-\tfrac{9}{25}} = \tfrac{4}{5}.$$

（同じことだが、$t = \tan\frac{1}{2}\theta$ とおくと不等式は $2t \le 1$ となり、$\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$ は高々 $\frac{4}{5}$ で、それをとるのは $t = \frac{1}{2}$ のときである。）

幾何学的関係。板の縁 P は中心線から水平距離 a のところにある。中心 O は中心線から距離 r にあり、P は O よりも $r\sin\theta$ だけ中心線に近い。よって

$$a = r - r\sin\theta = r(1-\sin\theta) \ge r\left(1-\tfrac{4}{5}\right) = \tfrac{1}{5}r,$$

となり、$r \le 5a$ を得る。

検算

- 極端な場合 $\sin\theta = \frac{4}{5}$、$\cos\theta = \frac{3}{5}$ において、$W = 1$、$k = 1$ とする。板の方程式から $F = \frac{1}{4}$、次いで $R = \frac{1}{2}$、$N = \frac{3}{2}$ を得る。よって $G/R = \frac{1}{2}$ がちょうど成り立ち（板は滑り出す直前である）、一方 $F/N = \frac{1}{6}$ は $\frac{1}{2}$ を十分に下回っており、小問 (ii) の予想どおりである。
- 4 つのつり合いの式（モーメントの式と、両方の物体についての分解）は、W、k、θ を 10^5 通りランダムに選んで計算機で確かめた。$G \le \frac{1}{2}R$ が成り立つのはちょうど $\sin\theta \le \frac{4}{5}$ のときであり、そのとき常に $F < \frac{1}{2}N$ が成り立つという主張も同様に確かめた。
- 極限での妥当性：幅の広い板（$a \to r$）は円柱の頂上近くに載るので、$\theta \to 0$ となり、摩擦はほとんど必要ない。幅の狭い板は円柱の間に深く食い込み、やがて円柱の間を滑り落ちる。

よくある間違い

- モーメントの式を省き、そのため $G = F$ に気づかないこと。これがないと未知数が多すぎる。

- 板の摩擦力の向きを誤ること。円柱は互いに離れるように転がろうとするので、円柱にはたらく摩擦力は下向きかつ内向きである。
- $a = r(1 - \sin\theta)$ ではなく $a = r\sin\theta$ と書くこと。a は円柱の中心からではなく、中心線から測る。

STEP のその先へ

これは小さな静定（statically determinate）系である。3 つの物体があり、すべての力を決定するのに十分な数の式があり、摩擦から得られる不等式が可能な配置の範囲を定める。大学 1 年の講義では、同じ考え方が剛体のつり合いの条件（合力が 0 かつ合モーメントが 0）として再び現れ、さらに後にはくさび効果（wedging）や詰まり（jamming）の研究にも現れる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の静力学と摩擦を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。