解答例

STEP II 2017、第 8 問

純粋数学 • ベクトルと垂心

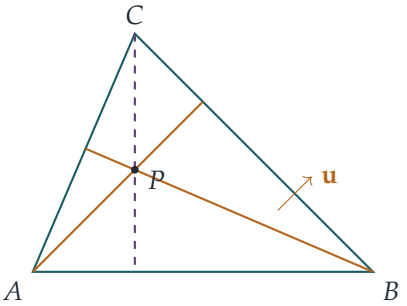
STEP II 2017、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/17-s2-q8

鍵となる考え方

これは、三角形の 3 本の垂線（altitude）が 1 点、すなわち**垂心**（orthocentre）で交わることのベクトルによる証明である。2 直線 $\mathbf{a}+\lambda\mathbf{u}$ と $\mathbf{b}+\mu\mathbf{v}$ の交点を求めるときのこつは、等式の両辺と $\mathbf{v}$ に垂直なベクトルとの内積（scalar product）をとることである。そうすれば μ が一気に消える。ここではそのようなベクトルがはじめから与えられている。$\mathbf{v}$ は CA に垂直なので、$\mathbf{c}-\mathbf{a}$ がその役目を果たすのである。



解答

1 本目の垂線

A を通り BC に垂直な直線は $\mathbf{a}$ を通り、方向ベクトルは $\mathbf{u}$ である（平面上で考えているので、BC に垂直なベクトルはすべて $\mathbf{u}$ の実数倍である）。その方程式は

$$\mathbf{r}=\mathbf{a}+\lambda\mathbf{u}.$$

である。同様に、B を通り CA に垂直な直線は $\mathbf{r}=\mathbf{b}+\mu\mathbf{v}$ である。

P を求める

この 2 直線は平行ではない。もし $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ が平行ならば、同じ平面内でそれぞれに垂直な BC と CA も平行になるが、三角形ではそれはありえないからである。したがって 2 直線はちょうど 1 点 P で交わり、そこでは

$$\mathbf{a}+\lambda\mathbf{u}=\mathbf{b}+\mu\mathbf{v}.$$

が成り立つ。両辺と $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ との内積をとる。$\mathbf{v}$ は CA に垂直なので $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=0$ であり、μ が消える。

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})+\lambda\,\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a}),\qquad\text{したがって}\qquad\lambda\,\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a}).$$

> ? **考えてみよう** $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})$ で割ってよいだろうか？

よい。もし $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=0$ ならば、$\mathbf{u}$ は BC だけでなく CA にも垂直になる。平面上ではこれは CA と BC が平行であることを意味するが、実際にはそうではない。よって

$$\mathbf{p}=\mathbf{a}+\frac{(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})}{\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})}\,\mathbf{u}.$$

CP は AB に垂直である

示すべきは $(\mathbf{p}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=0$ である。上で求めた係数を λ と書く。すると

$$(\mathbf{p}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=(\mathbf{a}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})+\lambda\,\mathbf{u}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}).$$

ここで役に立つのは、$\mathbf{u}$ が BC に垂直であることから $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{c})=0$ となり、

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=\mathbf{u}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{c})+\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a}).$$

が成り立つという観察である。したがって $\lambda\,\mathbf{u}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=\lambda\,\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})$ であり、

$$(\mathbf{p}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=-(\mathbf{c}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})+(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=0.$$

> ? **考えてみよう** 内積が 0 であることから、本当に直線 CP が得られるのだろうか？

それは $P\neq C$ のときに限られ、ここで「直角三角形でない」という条件が使われる。もし $P=C$ ならば、C は A を通り BC に垂直な直線上にあるので $AC\perp BC$ となり、C における角が直角になるが、これは除外されている。よって $\mathbf{p}-\mathbf{c}\neq\mathbf{0}$ であり、$\mathbf{b}-\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$ でもあるから、内積が 0 であることはまさに CP が AB に垂直であることを意味する。以上より、三角形の 3 本の垂線はすべて P を通る。

検算

$A=(0,0)$、$B=(5,0)$、$C=(1.5,3.5)$ とし、$\mathbf{c}-\mathbf{b}=(-3.5,3.5)$ に垂直な $\mathbf{u}=(1,1)$ をとる。すると $(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=7.5$、$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=5$ なので $\lambda=1.5$、$P=(1.5,1.5)$ である。これは C の真下にあるので CP は鉛直で AB に垂直であり、さらに $(\mathbf{p}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=(-3.5)(1.5)+(1.5)(3.5)=0$ なので、P は B からの垂線上にもある。一般の結果も、多数のランダムな三角形についてコンピュータで確認した。また、$\mathbf{u}$ を $k\mathbf{u}$ に置き換えても $\mathbf{p}$ の式は変わらないことにも注意しよう。当然そうでなければならない。

よくある間違い

- $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ ではなく $\mathbf{v}$ や $\mathbf{u}$ との内積をとってしまう。これでは両方のパラメータが式に残ってしまう。
- $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})$ が 0 でない理由を述べずに、それで割ってしまう。
- 最後の打ち消し合いを成り立たせる鍵である $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})$ という段階を見落とす。

STEP のその先へ

任意の三角形の垂心 H、重心（centroid）G、外心（circumcentre）O は 1 本の直線、すなわちオイラー線（Euler line）上にあり、$\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$ が成り立つ。O を原点にとると、これは $\mathbf{h}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ というすっきりした主張になり、同じ内積の考え方で証明できる。この種の内積は、線形代数（linear algebra）の最初の講義で学ぶ内積空間（inner-product space）の出発点である。それが展開されていく様子を見るには、ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（『線形代数入門』）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。