解答例

STEP II 2017、第 7 問

純粋数学 ・ 対数微分法

> **STEP II 2017、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q7

鍵となる考え方

ここに現れる累乗はすべて対数（logarithm）を通して $a^b = \mathrm{e}^{b\ln a}$ と定義されている。したがって x の二つの累乗を比べることはそれらの対数を比べることであり、exp は単調増加（increasing）なので、この二つの比較は同値である。注意すべき点はただ一つ、$\ln x$ の符号である。$0 < x < 1$ では $\ln x$ は負であり、それで割ると不等号の向きが逆になる。また、対数をとれば導関数（derivative）の計算も型どおりに進む。

解答

以下を通して、$\ln \mathrm{f}(x) = x \ln x$、$\ln \mathrm{g}(x) = \mathrm{f}(x) \ln x$ である。

小問 (i)

$0 < x < 1$ とすると、$\ln x < 0$ かつ $x - 1 < 0$ である。このとき

$$\ln \mathrm{f}(x) - \ln x = x \ln x - \ln x = (x-1)\ln x > 0,$$

となる。これは二つの負の数の積だからである。exp は単調増加なので、$\mathrm{f}(x) > x$ である。

また $x \ln x < 0$ なので、$\mathrm{f}(x) = \mathrm{e}^{x \ln x} < 1$ である。再び対数を比べる：

$$\ln \mathrm{g}(x) - \ln x = (\mathrm{f}(x) - 1)\ln x > 0, \qquad \text{なぜなら} \mathrm{f}(x) < 1 \text{ かつ } \ln x < 0,$$
$$\ln \mathrm{f}(x) - \ln \mathrm{g}(x) = (x - \mathrm{f}(x))\ln x > 0, \qquad \text{なぜなら} \mathrm{f}(x) > x \text{ かつ } \ln x < 0.$$

よって $\ln x < \ln \mathrm{g}(x) < \ln \mathrm{f}(x)$ であり、$0 < x < 1$ に対して $x < \mathrm{g}(x) < \mathrm{f}(x)$ が得られる。これが示すべきことであった。

$x > 1$ のときも同じ差を考えるが、今度は $\ln x > 0$、$x - 1 > 0$、$x \ln x > 0$ なので $f(x) > 1$ である。すると $(x-1)\ln x > 0$ から $f(x) > x$ が、$(x - f(x))\ln x < 0$ から $g(x) > f(x)$ が得られる。よって

$$x < f(x) < g(x) \qquad \text{ただし} x > 1,$$

であり、$x = 1$ では三つとも 1 に等しい。

小問 (ii)

$\ln f(x) = x \ln x$ を微分すると $f'(x)/f(x) = \ln x + 1$ となるので、

$$f'(x) = x^x(\ln x + 1).$$

$x^x > 0$ なので、$f'(x) = 0$ となるのは $\ln x = -1$、すなわち $x = e^{-1}$ のときに限る。（そこで f' は負から正へ符号を変えるので、これは最小値（minimum）であり、その値は $e^{-1/e} \approx 0.692$ である。）

小問 (iii)

$x \to 0$ のとき $x \ln x \to 0$ であり、exp は連続（continuous）なので、

$$f(x) = e^{x \ln x} \to e^0 = 1.$$

次に $\ln g(x) = f(x) \ln x$ において $f(x) \to 1$、$\ln x \to -\infty$ なので、$\ln g(x) \to -\infty$ となり、

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 0.$$

小問 (iv)

$x > 0$ に対して $h(x) = x^{-1} + \ln x$ とおく。すると

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2},$$

であり、これは $0 < x < 1$ で負、$x > 1$ で正である。よって h は減少したのち増加し、その最小値は $h(1) = 1$ である。したがって、すべての $x > 0$ に対して $x^{-1} + \ln x \geq 1$ が成り立つ。

次に、小問 (ii) を用いて $\ln g(x) = f(x) \ln x$ を積の微分法（product rule）で微分する：

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = f'(x) \ln x + \frac{f(x)}{x} = x^x \left[(\ln x + 1) \ln x + \frac{1}{x} \right] = x^x \left[(\ln x)^2 + \ln x + \frac{1}{x} \right].$$

考えてみよう いま証明した不等式は、この括弧の中身を扱うのにどう役立つだろうか？

括弧の中にはちょうど $\frac{1}{x}+\ln x$ が含まれており、これは 1 以上である。よって

$$(\ln x)^2+\ln x+\frac{1}{x} \;\geq\; (\ln x)^2+1 \;>\; 0.$$

$g(x)>0$ かつ $x^x>0$ なので、

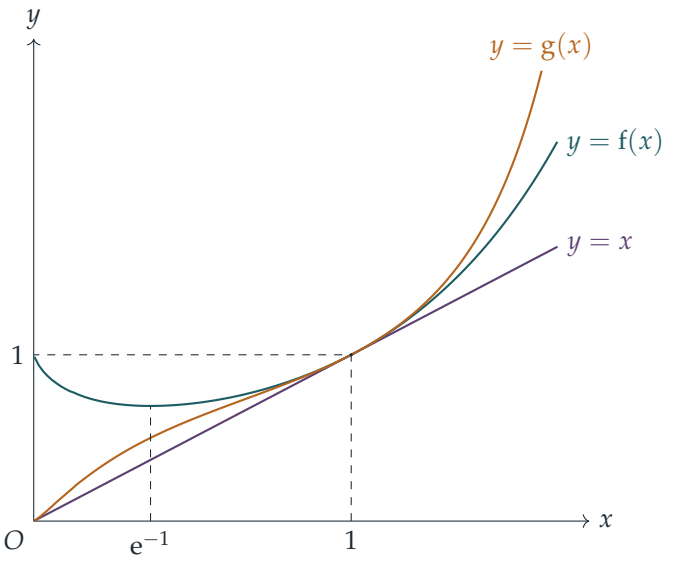
$$g'(x)=g(x)\,x^x\left[(\ln x)^2+\ln x+\frac{1}{x}\right]>0 \qquad \text{ただし} x>0,$$

が得られる。これが示すべきことであった。

グラフの概形

これまでの事実をまとめる：

- $y=f(x)$ は $x\to 0$ で 1 から出発し、$x=e^{-1}$ で最小値 $e^{-1/e}$ まで下がったのち、$(1,1)$ を通って上昇し、非常に速く増大する。$f'(x)=x^x(\ln x+1)\to-\infty$ なので、0 の近くでは傾きが非常に急である。
- $y=g(x)$ は原点から出発し、全域で増加し（小問 (iv)）、$(1,1)$ を通る。
- $0<x<1$ では大小関係は $x<g<f$ であり、$x>1$ では $x<f<g$ である。よって g と f は $(1,1)$ で交わり、三つの曲線はすべてそこで出会う。
- $x=1$ では $f'(1)=1$、$g'(1)=1\cdot 1\cdot(0+0+1)=1$ なので、どちらの曲線も $(1,1)$ で $y=x$ に接する。
- 原点の近くでは $g(x)/x=e^{(f(x)-1)\ln x}\to 1$ である（$f(x)-1\approx x\ln x$ なので、指数部分は $x(\ln x)^2\to 0$ のように振る舞う）。したがって $y=g(x)$ は $y=x$ に沿って、そのすぐ上側を通って原点から離れていく。



検算

- $x = \frac{1}{2}$ のとき：$\mathrm{f} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$、$\mathrm{g} = (\frac{1}{2})^{0.707} \approx 0.613$ なので、$0.5 < 0.613 < 0.707$ である。$x = 2$ のとき：$\mathrm{f} = 4$、$\mathrm{g} = 2^4 = 16$ なので、$2 < 4 < 16$ である。
- $\mathrm{f}(0.3) \approx 0.697$、$\mathrm{f}(\mathrm{e}^{-1}) \approx 0.6922$、$\mathrm{f}(0.4) \approx 0.693$ であり、e^{-1} で最小となることと矛盾しない。
- g' の式から $\mathrm{g}'(\frac{1}{2}) \approx 0.774$ が得られ、これはその点での g の差分商（difference quotient）と一致する。また、コンピュータによる確認でも $(0,3)$ 上で $\mathrm{g}' > 0$ であることが確かめられた。

よくある間違い

- $(0,1)$ 上で $\ln x < 0$ であることを忘れ、それで割るときに不等号の向きを逆にしないこと。大小関係が $x = 1$ を境に入れ替わるのは、まさにこのためである。
- x^x を $x \cdot x^{x-1}$ と微分する（指数（index）を定数とみなしている）、あるいは $x^x \ln x$ と微分する（底（base）を定数とみなしている）こと。両方の部分が必要である。
- g の極限（limit）を $1^{-\infty}$ と書いて当て推量をすること。代わりに $\ln \mathrm{g} = \mathrm{f} \ln x$ を用いて考えるべきである。

STEP のその先へ

累乗の塔 $x^{x^{x^{\cdots}}}$ はこのパターンを引き継ぐ。$0 < x < 1$ では、奇数の高さの塔 x, g,... と偶数の高さの塔 f,... が交互に並び、無限の塔が収束するのは $\mathrm{e}^{-\mathrm{e}} \leq x \leq \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$ のときに限る。これは単調数列（monotone sequence）と不動点（fixed point）のよい練習問題である。$x \ln x \to 0$ のような極限や、exp と ln による a^b の厳密な定義は、解析学（analysis）の最初の講義できちんと扱われる。Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門の教科書）を参照せよ。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。