解答例

STEP II 2017、第 6 問

純粋数学 • 不等式と数学的帰納法

STEP II 2017、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/17-s2-q6

鍵となる考え方

どちらの小問も、和 S_n を、おおよそ $\int_0^n x^{-1/2}\,\mathrm{d}x$ に等しい $2\sqrt{n}$ と比較するものである。(i) の帰納法（induction）では、n から $n+1$ への段階は $1/\sqrt{n+1}$ と $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ の比較に帰着し、この差を有理化（rationalising）すれば決着がつく。(ii) では、最小の C は、右辺（C を除いた部分）と S_n の差の最大値（maximum）である。そこで、n から $n+1$ へ移るときにこの差がどう変化するかを調べる。与えられた不等式こそが、この差が常に減少することを教えてくれるのである。

解答

小問 (i)

$P(n)$ を命題 $S_n \le 2\sqrt{n}-1$ とする。

初期段階（*base case*）。 $S_1 = 1$ かつ $2\sqrt{1}-1=1$ であるから、$P(1)$ は（等号で）成り立つ。

帰納段階（*inductive step*）。ある $k \ge 1$ について $P(k)$ が成り立つと仮定する。すると

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \le 2\sqrt{k} - 1 + \frac{1}{\sqrt{k+1}},$$

であるから、次を示せば十分である。

$$2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \le 2\sqrt{k+1}, \qquad \text{すなわち、} \qquad \frac{1}{\sqrt{k+1}} \le 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}).$$

有理化すると、

$$2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) = \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \geq \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k+1}},$$

となる。ここで、$\sqrt{k} \leq \sqrt{k+1}$ より分母が $2\sqrt{k+1}$ を超えないことを用いた。よって $S_{k+1} \leq 2\sqrt{k+1}-1$ となり、これは $P(k+1)$ である。

$P(1)$ は真であり、すべての $k \geq 1$ について $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ であるから、すべての正の整数 n に対して $S_n \leq 2\sqrt{n}-1$ が成り立つ。

小問 (ii)：不等式

$k \geq 0$ のとき、$(4k+1)\sqrt{k+1} > (4k+3)\sqrt{k}$ の両辺は非負（non-negative）であり、しかも左辺は正であるから、この不等式は両辺を平方した不等式と同値である。ここで

$$\begin{aligned}(4k+1)^2(k+1)-(4k+3)^2k &= (16k^2+8k+1)(k+1)-(16k^2+24k+9)k \\ &= (16k^3+24k^2+9k+1)-(16k^3+24k^2+9k) \\ &= 1 > 0.\end{aligned}$$

したがって $(4k+1)^2(k+1) > (4k+3)^2k$ であり、正の平方根をとれば、すべての $k \geq 0$ に対して $(4k+1)\sqrt{k+1} > (4k+3)\sqrt{k}$ が得られる。これが示すべきことであった。

小問 (ii)：最小の C

次のように定義する。

$$T_n = 2\sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} - S_n.$$

不等式 $S_n \geq 2\sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} - C$ は $C \geq T_n$ と同じである。よってこの不等式がすべての n で成り立つのは、C がすべての T_n 以上であるときであり、またそのときに限る。そのような C のうち最小のものは、T_n の最大値（存在すれば）である。

考えてみよう S_n を表す式を知らずに、どうすれば最大の T_n を見つけられるだろうか。

変化量 $T_{n+1}-T_n$ に注目する。この中では S_n が消える。$S_{n+1}-S_n = 1/\sqrt{n+1}$ であるから、

$$\begin{aligned}T_{n+1}-T_n &= 2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\frac{1}{2\sqrt{n+1}}-\frac{1}{2\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &= 2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}-\frac{1}{2\sqrt{n+1}}-\frac{1}{2\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

両辺に正の量 $2\sqrt{n}\sqrt{n+1}$ を掛けると、

$$\begin{aligned}2\sqrt{n}\sqrt{n+1}\,(T_{n+1}-T_n) &= 4(n+1)\sqrt{n}-4n\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\\ &= (4n+3)\sqrt{n}-(4n+1)\sqrt{n+1}.\end{aligned}$$

いま証明した不等式（$k=n$ とする）により、これは負である。よってすべての $n\geq 1$ に対して $T_{n+1}<T_n$ である。すなわち数列（sequence）T_n は狭義単調減少（strictly decreasing）であり、その最大値は最初の値

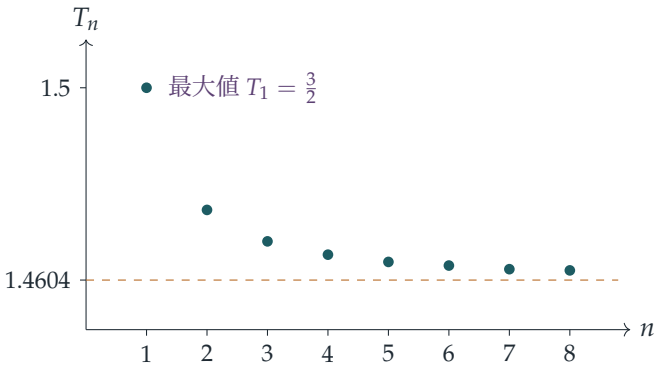
$$T_1 = 2+\tfrac{1}{2}-1 = \tfrac{3}{2}.$$

である。したがって、すべての $n\geq 1$ に対して $S_n \geq 2\sqrt{n}+\frac{1}{2\sqrt{n}}-\frac{3}{2}$ が成り立つ。これより小さい C では成り立たない。$n=1$ のとき不等式は $1\geq \frac{5}{2}-C$ となり、$C\geq\frac{3}{2}$ が必要だからである。求める最小の数は

$$C=\tfrac{3}{2}.$$

である。

T_n の最初のいくつかの値を見ると、どれほど速く落ち着いていくかがわかる。



（縦軸は引き伸ばされており、およそ 1.45 から 1.51 までの範囲を表している。）

検算

- $n=4$ のとき、$S_4 = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\approx 2.7845$ であり、これは $2\sqrt{4}+\frac{1}{4}-\frac{3}{2}=2.75$ と $2\sqrt{4}-1=3$ の間にある。両方の結果が要求するとおりである。
- 最初の 200 000 個の値をコンピュータで調べたところ、両方の評価が成り立つことと、T_n が減少することが確認された。T_n は 1.5 からおよそ 1.46035 に向かって減少し、1.5 に戻ることはない。
- 恒等式 $(4k+1)^2(k+1)-(4k+3)^2k=1$ は $k=1$ で簡単に確かめられる。実際、$25\cdot 2-49=1$ である。

よくある間違い

- T_n の最大値ではなく極限（limit）（およそ 1.46）を答えてしまう。C が $\frac{3}{2}$ より小さいと $n = 1$ で成り立たない。
- 両辺が非負であることを先に確認せずに不等式を平方してしまう。
- 等号が成り立つ場合を示して、$C = \frac{3}{2}$ が実際に最小であることを示すのを忘れる。

STEP のその先へ

数列 T_n はある極限へ向かって減少し、その極限は $-\zeta(\frac{1}{2}) \approx 1.46035$ である。ここで ζ はリーマン（Riemann）ゼータ関数（zeta function）であり、それを定義する級数が収束する領域の外まで拡張したものである。和を積分と比較し、さらに $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ のような項で補正するという方法は、オイラー–マクローリンの公式（Euler–Maclaurin formula）の出発点である。その根底にある「有界な単調数列は収束する」という事実は、大学 1 年次の解析学で学ぶ単調収束定理（monotone convergence theorem）である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）がこれを丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。