解答例

STEP II 2017、第 5 問

純粋数学 • 放物線の法線と円

> **STEP II 2017、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q5

鍵となる考え方

すべては、放物線（parabola）$x = at^2, y = 2at$ に関するただ一つの事実に基づいている。すなわち、パラメータ t_1 と t_2 に対応する点を結ぶ弦（chord）の傾き（gradient）は $\dfrac{2}{t_1 + t_2}$ である。これを使えば、「法線（normal）が曲線と再び交わる」ことも、「半円に対する円周角は直角である（angle in a semicircle）」ことも、パラメータの間の簡単な方程式になり、幾何の問題が短い代数計算に変わる。

解答

有用な事実：弦の傾き

相異なるパラメータ $t_1 \neq t_2$ に対して、$(at_1^2, 2at_1)$ と $(at_2^2, 2at_2)$ を結ぶ弦の傾きは、$t_1 - t_2 \neq 0$ で約分して

$$\frac{2a(t_1 - t_2)}{a(t_1^2 - t_2^2)} = \frac{2}{t_1 + t_2},$$

となる。（$t_1 + t_2 = 0$ のとき弦は鉛直である。）$t_2 \to t_1$ とすれば、t における接線（tangent）の傾きは $\frac{1}{t}$ である。直接計算しても $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2a}{2at} = \dfrac{1}{t}$ である。

小問 (i)

P における接線の傾きは $\frac{1}{p}$ であるから、法線の傾きは $-p$ である（ここで $p \neq 0$ を用いた）。$n \neq p$ である点 N がこの法線上にあるのは、弦 PN の傾きが $-p$ であるとき、

かつそのときに限る：

$$\frac{2}{p+n} = -p \iff p+n = -\frac{2}{p} \iff n = -\left(p+\frac{2}{p}\right).$$

（P における法線の傾きは有限の値 $-p$ であるから、弦 PN が鉛直になることはない。）また、$n-p = -2(p+\frac{1}{p})$ であり、実数 p に対して $p+\frac{1}{p} \neq 0$ であるから $n \neq p$ となり、これは確かに第二の点である。以上で求める結果が示された。

小問 (ii)

$p+n = -\frac{2}{p}$ および $p-n = 2p+\frac{2}{p} = \dfrac{2(p^2+1)}{p}$ を用いると、

$$\begin{aligned}
|PN|^2 &= a^2(p^2-n^2)^2 + 4a^2(p-n)^2 \\
&= a^2(p-n)^2[(p+n)^2+4] \\
&= a^2 \cdot \frac{4(p^2+1)^2}{p^2} \cdot \left(\frac{4}{p^2}+4\right) = a^2 \cdot \frac{4(p^2+1)^2}{p^2} \cdot \frac{4(p^2+1)}{p^2} \\
&= 16a^2 \frac{(p^2+1)^3}{p^4},
\end{aligned}$$

となり、題意が示された。

最小化するために、$u = p^2 > 0$ とおき、$f(u) = \dfrac{(u+1)^3}{u^2}$ とする。商の微分法（quotient rule）により、

$$f'(u) = \frac{3(u+1)^2u^2 - 2u(u+1)^3}{u^4} = \frac{(u+1)^2(3u-2u-2)}{u^3} = \frac{(u+1)^2(u-2)}{u^3}.$$

$u > 0$ のとき因子 $\frac{(u+1)^2}{u^3}$ は正であるから、$0 < u < 2$ で $f'(u) < 0$、$u > 2$ で $f'(u) > 0$ である。よって f は減少したのち増加し、$u > 0$ における最小値は $u = 2$、すなわち $p^2 = 2$ でとる。$|PN|^2 = 16a^2 f(p^2)$ であるから、このとき $|PN|$ は最小となる。（最小値は $|PN|^2 = 16a^2 \cdot \frac{27}{4} = 108a^2$ であり、$|PN| = 6\sqrt{3}\,a$ である。）

小問 (iii)

PN は直径（diameter）であり、Q は P, N 以外の円周上の点であるから、角 PQN は直角である（半円に対する円周角）。よって $QP \perp QN$ である。

> ? **考えてみよう** QP や QN が鉛直になって、傾きの積を考えられなくなることはないだろうか？

もし QP が鉛直なら QN は水平となり、Q と N の y 座標が等しくなって $q = n$ となるが、$Q \neq N$ であるからこれは不可能である。同様に、QN が鉛直なら QP は水平と

なり $q = p$ となってしまう。したがって両方の傾きは有限かつ 0 でなく、その積は -1 である：

$$\frac{2}{q+p} \cdot \frac{2}{q+n} = -1 \iff (q+p)(q+n) = -4.$$

展開し、小問 (i) から得られる $p+n = -\frac{2}{p}$ と $pn = -p^2 - 2$ を用いると、

$$q^2 + (p+n)q + pn = q^2 - \frac{2q}{p} - p^2 - 2 = -4,$$

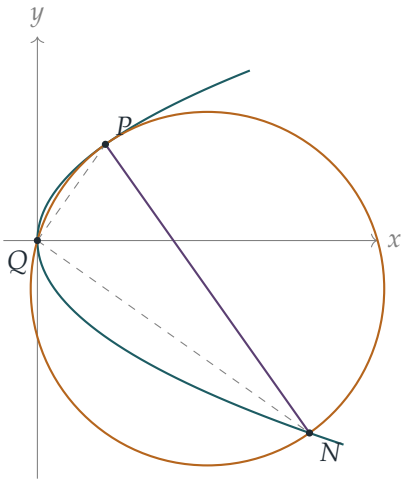
となり、これを整理すると

$$2 = p^2 - q^2 + \frac{2q}{p},$$

となって、題意が示された。

結論の導出。 $q = 0$ とおくと、関係式は $2 = p^2$ となる。逆に $p^2 = 2$ ならば、関係式から $q^2 - \frac{2q}{p} = 0$、すなわち $q = 0$ または $q = \frac{2}{p}$ を得る。しかし $\frac{2}{p} = \frac{p^2}{p} = p$ であり、これは点 P そのものであるから、Q は $q = 0$ でなければならない。よって Q が原点にあるのは $p^2 = 2$ のとき、かつそのときに限り、これは小問 (ii) により、$|PN|$ が最小となるとき、かつそのときに限る。

一般に、この関係式は q の二次方程式 $q^2 - \frac{2}{p}q + (2 - p^2) = 0$ であり、その解の和は $\frac{2}{p}$ である。一方の解は常に $q = p$ であるから、もう一方は $q = \dfrac{2-p^2}{p}$ であり、これが 0 となるのはちょうど $p^2 = 2$ のときである。



図は最小となる場合 $a = 1, p = \sqrt{2}$ を示している：法線 PN（紫）、PN を直径とする円（琥珀色）、そして $Q = O$ における直角である。

検算

- $a = 1, p = 1$ のとき：$n = -3$ であるから $P = (1,2)$、$N = (9,-6)$ である。このとき $|PN|^2 = 64 + 64 = 128$ であり、公式からも $16 \cdot 8/1 = 128$ が得られる。
- $p = \sqrt{2}, a = 1$ のとき：$P = (2, 2\sqrt{2})$、$N = (8, -4\sqrt{2})$ であり、$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{ON} = 16 - 16 = 0$ であるから、原点は確かに PN を直径とする円の上にある。このとき $|PN| = 6\sqrt{3} \approx 10.392$ である。
- いくつかの p の値について、円と放物線の交点を数値的に求めると、（P 以外では）ちょうどパラメータ n と $\frac{2-p^2}{p}$ が得られる。

よくある間違い

- $q = p$ も最後の関係式を満たすことを見落とし、$p^2 = 2$ のとき Q の位置が二通りあると誤って結論してしまう。
- 法線の傾きを $-\frac{1}{p}$ と書いてしまう：接線の傾きが $\frac{1}{p}$ なのだから、法線の傾きは $-p$ である。

STEP のその先へ

円と放物線は一般に四点で交わる。円の方程式に $x = at^2, y = 2at$ を代入すると、t^3 の項をもたない t の四次方程式（quartic）が得られるので、四つのパラメータの和は 0 である。ここでは $n + q = -\frac{2}{p} - p + \frac{2}{p} = -p$ であるから、四つ目のパラメータは再び p となる。すなわち円は P において放物線に接している。そこでの半径は法線に沿っているのだから、そうなるのは当然である。このように交点を重複度（multiplicity）込みで数えることは、代数幾何学（algebraic geometry）の出発点である（ベズー（Bézout）の定理）。この種の問題をさらに解きたい場合は、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）を参照されたい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。