解答例

STEP II 2017、第 4 問

純粋数学 ・ 積分に関するコーシー・シュワルツの不等式

> **STEP II 2017、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q4

鍵となる考え方

シュワルツ（Schwarz）の不等式（Schwarz inequality）は、積の積分 $\int fg$ を、2 乗の積分 $\int f^2$ と $\int g^2$ によって上から評価するものである。したがって技術のすべては、評価したい積分ただ 1 つを除いて、現れる積分がすべて計算できるように f と g を選ぶことにある。求めたい積分が $\int fg$ であれば、**上界**（upper bound）が得られる。それが $\int f^2$ または $\int g^2$ であれば、両辺を割ることで**下界**（lower bound）が得られる。

解答

以下では一貫して、$(*)$ を $\left(\int fg\right)^2 \le \int f^2 \cdot \int g^2$ と書く。

小問 (i)

示すべき式には e^t が含まれているので、$f(x) = 1$、$g(x) = \mathrm{e}^x$、$a = 0$、$b = t$ とおく。すると

$$\int_0^t \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^t - 1, \qquad \int_0^t 1 \,\mathrm{d}x = t, \qquad \int_0^t \mathrm{e}^{2x} \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{2t} - 1),$$

であるから、$(*)$ は

$$(\mathrm{e}^t - 1)^2 \le \frac{t}{2}\,(\mathrm{e}^{2t} - 1) = \frac{t}{2}\,(\mathrm{e}^t - 1)(\mathrm{e}^t + 1).$$

を意味する。$t > 0$ より $\mathrm{e}^t - 1 > 0$ であり、また $\mathrm{e}^t + 1 > 0$ である。正の量 $(\mathrm{e}^t - 1)(\mathrm{e}^t + 1)$ で割っても不等号の向きは変わらないので、

$$\frac{\mathrm{e}^t - 1}{\mathrm{e}^t + 1} \le \frac{t}{2},$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

$\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x$ が $\int g^2$ として現れるようにしたいので、$[0,1]$ 上で $g(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}$、$f(x)=x$ とおく。積 $x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}$ はまさに積分できる形である（外側にある x のべきが、定数倍を除いて指数部分の導関数になっている）：

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}\,\mathrm{d}x=\left[-2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}\right]_0^1=2(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}),\qquad \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.$$

よって $(*)$ より

$$4(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}})^2\le\frac{1}{3}\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x,$$

が得られ、両辺に 3 を掛けて

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x\ge 12(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}})^2.$$

小問 (iii)

$J=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x$ とおく。ここでの積分はすべて $[0,\frac{1}{2}\pi]$ 上で行う。この区間では $\sin x\ge 0$ かつ $\cos x\ge 0$ であるから、根号はすべて実数である。

上界。ここでは J を $\int fg$ とすべきである。$f(x)=1$、$g(x)=\sqrt{\sin x}$ とおけば、$g^2=\sin x$ は容易に積分できる：

$$J^2\le\int_0^{\frac{1}{2}\pi}1\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\cdot 1.$$

$J>0$ であるから、正の平方根をとって $J\le\sqrt{\pi/2}$ を得る。

下界。今度は J が 2 乗の積分の一方でなければならないので、$f(x)=(\sin x)^{1/4}$ とおく。すると $f^2=\sqrt{\sin x}$ である。

> ? **考えてみよう** $\int fg$ と $\int g^2$ の両方が計算できるようになる g はどれか。

g^2 が容易に積分でき、しかも $(\sin x)^{1/4}g(x)$ も容易に積分できる必要がある。$g(x)=\cos x$ という選び方はその両方を満たす：$(\sin x)^{1/4}\cos x$ は $\sin x$ のべきとその導関数の積である。答えの形も手がかりになる。分母に π があることから、$\int g^2=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$ が示唆されるのである。実際、

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin x)^{1/4}\cos x\,\mathrm{d}x=\left[\tfrac{4}{5}(\sin x)^{5/4}\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}=\frac{4}{5}$$

であり、

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$

である。よって $(*)$ より

$$\frac{16}{25} \le J \cdot \frac{\pi}{4}, \qquad \text{すなわち} \qquad J \ge \frac{64}{25\pi}.$$

2 つの評価を合わせると、

$$\frac{64}{25\pi} \le \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

補足。 ほかの選び方でもうまくいき、中にはより良い評価を与えるものもある。$f = (\sin x)^{1/4}$、$g = (\sin x)^{3/4}$ とおくと $1 \le J\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin x)^{3/2}\,\mathrm{d}x$ が得られ、さらに $f = \sin x$、$g = \sqrt{\sin x}$ として $(*)$ をもう一度用いると $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin x)^{3/2}\,\mathrm{d}x \le \sqrt{\pi/4}$ が示される。これらを合わせると、より精密な評価 $J \ge 2/\sqrt{\pi} \approx 1.128$ が得られる。

検算

- (i)：$t \to 0$ のとき左辺は $\tanh(t/2) \approx t/2$ であるから、t が小さいときこの評価はほぼ等号に近い。t が大きいとき左辺は 1 に近づくが、$t/2$ は限りなく大きくなる。
- (ii)：$\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x \approx 0.8556$ であり、一方 $12(1-\mathrm{e}^{-1/4})^2 \approx 0.5871$ である。
- (iii)：数値的には $J \approx 1.1981$ であり、これは $64/(25\pi) \approx 0.8149$ と $\sqrt{\pi/2} \approx 1.2533$ の間にある。上界がかなり近いのは、$\sqrt{\sin x}$ が区間の大部分でかなり平坦（1 に近い）であり、$f = 1$ としたシュワルツの不等式は g が定数のときにちょうど等号が成り立つからである。

よくある間違い

- 評価の向きを取り違える。未知の積分を $\int fg$ とした場合、シュワルツの不等式はそれを上からしか評価できない。したがって下界を得るには、未知の積分を $\int f^2$ または $\int g^2$ としなければならない。
- (i) で、$\mathrm{e}^t - 1$ が正であることを述べずにそれで割ってしまう。
- (iii) の上界で、$J > 0$ を用いて正の平方根をとることを忘れる。

STEP のその先へ

シュワルツ（コーシー–シュワルツ）の不等式は、内積（inner product）$\langle f, g\rangle = \int fg$ が $|\langle f, g\rangle| \le \|f\|\,\|g\|$ を満たし、等号が成り立つのは f と g が比例するときに限ることを述べている。コーシー（Cauchy）の名も冠されるこの不等式は、$\mathbb{R}^n$ のベクトルから

関数の空間に至るまで、あらゆる内積空間（inner product space）で成り立ち、「2 つの関数のなす角」に意味を与えるのもこの不等式である。この考え方はフーリエ級数（Fourier series）や最小二乗近似（least-squares approximation）の基礎となっている。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は内積と直交性（orthogonality）を詳しく展開しており、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学を理解する）は、このような不等式が積分を制御するのにどのように使われるかを示している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。