解答例

STEP II 2017、第 3 問

純粋数学 • 曲線の概形

> **STEP II 2017、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q3

鍵となる考え方

方程式 $\sin y = k$ の解は決して一つだけではない。y_0 が解ならば $\pi - y_0$ も解であり、これらと 2π の整数倍だけ異なるものもすべて解である。したがって、ここで描く図はどれも、一つの基本曲線のいくつかのコピーを正弦関数の対称性（symmetry）に従って配置したものである。小問 (i) では直線を使ってこの様子を示す。(ii) では微分によって基本となる部分 $y = \arcsin(\frac{1}{2}\sin x)$ の形を決め、残りは対称性が片づけてくれる。小問 (iii) は、$\cos y$ を正弦で書き直せば (ii) と同じ問題になる。

解答

小問 (i)

$\sin y = \sin x$ となるのは、ちょうど

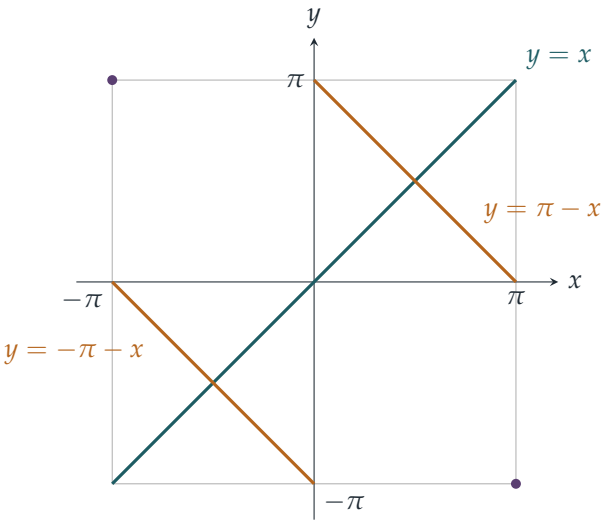
$$y = x + 2k\pi \qquad \text{または} \qquad y = \pi - x + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

のときである。次に、これらの直線のうち正方形 $-\pi \le x, y \le \pi$ と交わるものを調べる。

- $y = x$ は対角線全体を $(-\pi, -\pi)$ から (π, π) まで通る。
- $y = x \pm 2\pi$ となるには $y - x = \pm 2\pi$ が必要である。正方形内では $|y - x| \le 2\pi$ であり、等号は角でのみ成り立つので、これらからは孤立した 2 点 $(-\pi, \pi)$ と $(\pi, -\pi)$ だけが得られる。
- $x + y = \pi$ は $(0, \pi)$ から $(\pi, 0)$ への線分であり、$x + y = -\pi$（$k = -1$ の場合）は $(-\pi, 0)$ から $(0, -\pi)$ への線分である。

▶ $|x+y| \leq 2\pi$ であるから、$x+y = 3\pi$ または -3π となることはない。

したがって、求める集合は対角線 $y = x$、$x+y = \pm\pi$ の 2 本の線分、および 2 つの角の点 $(-\pi, \pi)$ と $(\pi, -\pi)$ からなる。



孤立した角の点は見落としやすい。$\sin(\pm\pi) = 0$ であるから、これらは正真正銘の解である。

小問 (ii)

$\sin y = \frac{1}{2}\sin x$ を陰関数微分（implicit differentiation）すると $y' \cos y = \frac{1}{2}\cos x$ を得る。$0 \leq y \leq \frac{1}{2}\pi$ では $\cos y \geq 0$ であるから

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - \tfrac{1}{4}\sin^2 x} = \tfrac{1}{2}\sqrt{4 - \sin^2 x}$$

であり、これは決して零にならない。よって

$$y' = \frac{\cos x}{\sqrt{4 - \sin^2 x}}.$$

$s = \sin x$ とおく。$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{4 - s^2} = \dfrac{-s\cos x}{\sqrt{4 - s^2}}$ を用いて商の微分法（quotient rule）を適用すると

$$y'' = \frac{-\sin x\sqrt{4 - s^2} - \cos x \cdot \dfrac{-s\cos x}{\sqrt{4 - s^2}}}{4 - s^2} = \frac{-s(4 - s^2) + s\cos^2 x}{(4 - s^2)^{3/2}}$$
$$= \frac{s\left(-4 + s^2 + 1 - s^2\right)}{(4 - s^2)^{3/2}} = -\frac{3\sin x}{(4 - \sin^2 x)^{3/2}}$$

となる。ここで $\cos^2 x = 1 - s^2$ を用いた。これが求める結果である。

基本となる部分。この 4 分の 1 の正方形において、曲線は $y = f(x)$ である。ただし $f(x) = \arcsin(\frac{1}{2}\sin x)$ とする。曲線は $(0,0)$ から始まり、$\arcsin\frac{1}{2} = \frac{1}{6}\pi$ であるから $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{6}\pi)$ で終わる。したがって、上の辺 $y = \frac{1}{2}\pi$ に近づくことはない。傾きは原点で $\frac{1}{2}$ であり、$x = \frac{1}{2}\pi$ で 0 まで減少する。また、$0 < x \leq \frac{1}{2}\pi$ で $y'' < 0$、$x = 0$ で $y'' = 0$ であるから、曲線は上に凸（concave）で増加し、原点が変曲点（point of inflection）となる。

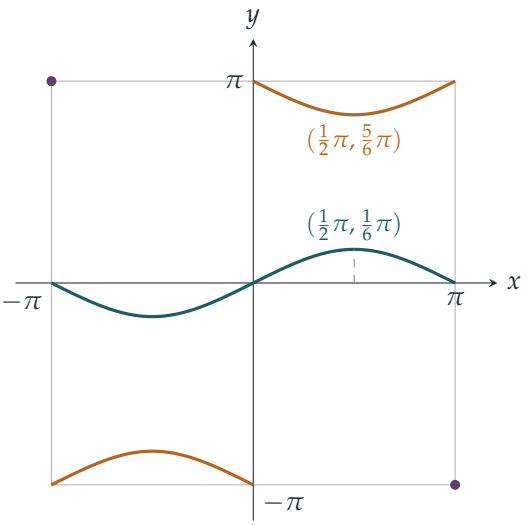
考えてみよう これ以上微積分の計算をせずに、この小さな弧から正方形全体の図を得るにはどうすればよいか。

対称性を用いる。$\sin(\pi - x) = \sin x$ であり、f は奇関数（odd function）であるから、$[-\pi, \pi]$ における $y = f(x)$ のグラフは $x = \frac{1}{2}\pi$ に関して対称であり、原点に関して点対称である。これは $(-\pi, 0)$、$(0,0)$、$(\pi, 0)$ を通る緩やかな波であり、極大点 $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{6}\pi)$ と極小点 $(-\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{6}\pi)$ をもつ。傾きは原点で $\frac{1}{2}$、$x = \pm\pi$ で $-\frac{1}{2}$ である。

(i) と同様に、解の集合全体は $y = f(x) + 2k\pi$ または $y = \pi - f(x) + 2k\pi$ で与えられる。正方形内に残るのは次のものである。

- すべての $-\pi \leq x \leq \pi$ に対する波 $y = f(x)$。
- $y = \pi - f(x)$。これが正方形内にあるのは $f(x) \geq 0$ となるところ、すなわち $0 \leq x \leq \pi$ のときだけである。これは $(0, \pi)$ から (π, π) へ垂れ下がるアーチであり、$(\frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi)$ で最も低くなる。
- $y = -\pi - f(x)$。これが正方形内にあるのは $f(x) \leq 0$ となるところ、すなわち $-\pi \leq x \leq 0$ のときだけである。これは $(-\pi, -\pi)$ から $(0, -\pi)$ へ盛り上がるアーチであり、$(-\frac{1}{2}\pi, -\frac{5}{6}\pi)$ で最も高くなる。
- 孤立した角の点 $(-\pi, \pi)$ と $(\pi, -\pi)$。これらは $x = -\pi$ における $y = \pi - f(x)$ と、$x = \pi$ における $y = -\pi - f(x)$ から得られる。

これ以外の k の値では $|y| > \pi$ となる。アーチは直線 $y = \pm\pi$ と傾き $\pm\frac{1}{2}$ で交わり、波を半回転させて上または下に平行移動したものになっている。(i) と比べてみよう。対角線は平らになって波となり、2 本の線分は曲がってアーチとなった。



小問 (iii)

考えてみよう $\cos y$ を、すでに描いたものに帰着させるにはどうすればよいか。

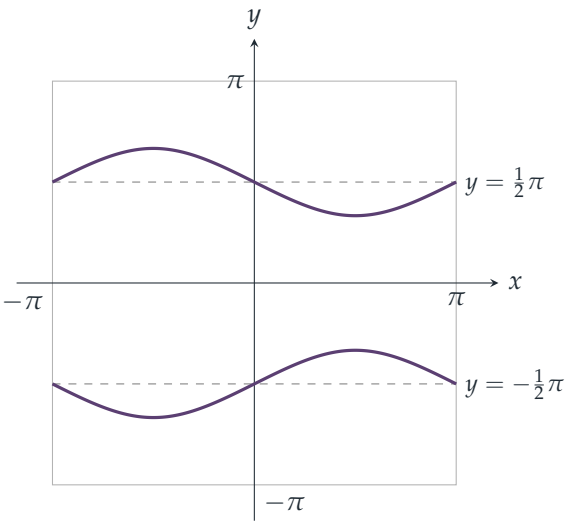
$\cos y = \sin(\frac{1}{2}\pi - y)$ と書く。すると $\cos y = \frac{1}{2}\sin x$ は、$u = \frac{1}{2}\pi - y$ が $\sin u = \frac{1}{2}\sin x$ を満たすことを意味するから、$u = f(x) + 2k\pi$ または $u = \pi - f(x) + 2k\pi$ である。すなわち

$$y = \tfrac{1}{2}\pi - f(x) - 2k\pi \qquad \text{または} \qquad y = f(x) - \tfrac{1}{2}\pi - 2k\pi.$$

$|f(x)| \leq \frac{1}{6}\pi$ であるから、$[-\pi, \pi]$ に値をとるのは $k = 0$ のときだけであり、そのときはすべての x に対してそうなる。したがって、求める集合はちょうど 2 つの完全な波からなる。

- $y = f(x) - \frac{1}{2}\pi$：(ii) の波を $\frac{1}{2}\pi$ だけ下に平行移動したもので、$-\frac{2}{3}\pi$ と $-\frac{1}{3}\pi$ の間を振動する。
- $y = \frac{1}{2}\pi - f(x)$：$x$ 軸に関するその鏡像である（$\cos y$ は y について偶関数であるから、こうなるはずである）。極小点 $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{3}\pi)$ と極大点 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{2}{3}\pi)$ をもつ。

今回は孤立点はない。



検算

- 試しの点：$(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{6}\pi)$ では $\sin\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}\pi$ となり、$(\frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi)$ でも成り立つ。(iii) では、$(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{3}\pi)$ で $\cos\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$ となる。
- $x = 0$ では公式から $y' = \frac{1}{2}$ が得られ、小角近似 (small-angle approximation) $y \approx \frac{1}{2}x$ と一致する。$x = \frac{1}{2}\pi$ では $y' = 0$ となり、極大点ではそうでなければならない。
- コンピュータによる検証で、y' と y'' の公式が正しいことを、$(0, \frac{1}{2}\pi)$ 内の無作為な点における有限差分（finite differences）によって確かめた。また、多数の無作為な x に対して $y \in [-\pi, \pi]$ となる解をすべて求めたところ、上で述べた分枝と一致した。(ii) では $x \neq 0, \pm\pi$ のとき 2 つ、(iii) では常に 2 つである。

よくある間違い

- (i) と (ii) で角の点 $(-\pi, \pi)$ と $(\pi, -\pi)$ を見落とす。
- (ii) のアーチを $[-\pi, \pi]$ 全体にわたって描いてしまう。$y = \pi - f(x)$ は $f(x) < 0$ となるとすぐに正方形から出てしまう。
- $\cos y = -\frac{1}{2}\sqrt{4 - \sin^2 x}$ としてしまう。符号は $0 \leq y \leq \frac{1}{2}\pi$ によって決まる。

STEP のその先へ

$\{(x,y) : F(x,y) = 0\}$ のような集合を**等位集合**（level set）という。陰関数定理（implicit function theorem）によれば、$\partial F/\partial y \neq 0$ となるところでは、この集合は局所的に滑らかなグラフである。ここでそれが成り立たないのはちょうど $\cos y = 0$ となるところであり、$|\sin y| \leq \frac{1}{2}$ のときにはそれは決して起こらないので、(ii) の曲線は x の関数として滑らかなグラフである。(i) では、直線の交点は $\sin y - \sin x$ の 2 つの偏導関数（partial derivative）がともに零になる点であり、そこで等位集合は曲線でなくなる。Bartle と Sherbert の *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）は 1 変数の基礎を築く本であり、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学を理解する）は生き生きとした良き伴侶となる。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。