解答例

STEP II 2017、第 2 問

純粋数学 • 周期数列

> **STEP II 2017、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q2

鍵となる考え方

写像を自分自身と合成して整理する。漸化式（recurrence）を 2 回適用すると、まったく同じ「一次分の一次」の形をした別の写像が得られるので、4 回の適用は 2 回の適用を 2 回行うことにほかならない。$x_{n+k} = x_n$ となるかどうかを調べるたびに、分母を払うと x_n についての二次式が現れ、しかもその二次式は因数分解（factorise）できる。その因数の一つは常に $x^2 + (b-a)x + 1$ であり、その根はちょうど漸化式の**不動点**（fixed point）、すなわち定数列を与える値である。この点に気づくことが、両方の小問を解く鍵になる。

解答

$f(x) = \dfrac{ax-1}{x+b}$ とおくと、$x_{n+1} = f(x_n)$ である。このとき

$$x_{n+2} = \frac{a\dfrac{ax_n - 1}{x_n + b} - 1}{\dfrac{ax_n - 1}{x_n + b} + b}.$$

分子と分母に $x_n + b$（仮定により 0 でない）を掛けると、

$$x_{n+2} = \frac{a(ax_n - 1) - (x_n + b)}{(ax_n - 1) + b(x_n + b)} = \boxed{\frac{(a^2-1)x_n - (a+b)}{(a+b)x_n + b^2 - 1}}$$

を得る。

ここでもう一つの事実を記録しておくとよい。値 x が不動点である（$f(x) = x$）のは、

$ax-1=x^2+bx$ のとき、すなわち

$$q(x)\equiv x^2+(b-a)x+1=0. \qquad (*)$$

のとき、かつそのときに限る。x_0 が q の根ならば $x_1=x_0$ となり、以下同様である。つまり数列は定数列であり、周期（period）は1である。

小問 (i)

数列が周期2をもつと仮定する。このとき特に $x_2=x_0$ である。x_{n+2} の式に $x=x_0$ を代入して分母を払うと、

$$\begin{aligned}0&=(a^2-1)x-(a+b)-x[(a+b)x+b^2-1]\\&=-(a+b)x^2+(a^2-b^2)x-(a+b)\\&=-(a+b)[x^2+(b-a)x+1],\end{aligned}$$

となる。ここで $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ を用いた。よって $(a+b)\,q(x_0)=0$ である。

考えてみよう なぜ「$q(x_0)=0$ となるのは x_0 の一つの値にすぎない」と言って議論を終えることはできないのだろうか。

x_0 はただ一つの数であり、それが q の根であることを妨げるものは何もないからである。それを排除するのは $(*)$ の意味である。$q(x_0)=0$ ならば x_0 は不動点であるから、$x_1=x_0$ となり、数列はすべての n について $x_{n+1}=x_n$ を満たす。これは周期1であり、周期2の定義によって禁じられている（$m=1$ とせよ）。したがって $q(x_0)\neq 0$ であり、ゆえに

$$a+b=0$$

は周期2であるための必要条件である。

（逆に、$b=-a$ ならば2ステップの式は $x_{n+2}=\dfrac{(a^2-1)x_n}{a^2-1}=x_n$ に帰着する。ここで $a^2=1$ の場合は起こりえない。実際そのときは、$a=1, b=-1$ ならば $x_1=1$、$a=-1, b=1$ ならば $x_1=-1$ となり、いずれにしても $x_1+b=0$ となって、これは除外されているからである。）

小問 (ii)

$A=a^2-1, B=b^2-1, c=a+b$ とおくと、$g(x)=\dfrac{Ax-c}{cx+B}$ として $x_{n+2}=g(x_n)$ である。g を2回適用し、再び分子と分母に $cx+B$ を掛けると、

$$x_{n+4}=\frac{A(Ax_n-c)-c(cx_n+B)}{c(Ax_n-c)+B(cx_n+B)}=\frac{(A^2-c^2)x_n-c(A+B)}{c(A+B)x_n+B^2-c^2}.$$

となる。さて、$x_{n+4} = x_n$ が成り立つのは

$$\begin{aligned} 0 &= (A^2 - c^2)x_n - c(A+B) - x_n[c(A+B)x_n + B^2 - c^2] \\ &= -c(A+B)x_n^2 + (A^2 - B^2)x_n - c(A+B) \\ &= -(A+B)[c\,x_n^2 + (B-A)x_n + c]. \end{aligned}$$

のとき、かつそのときに限る。$B - A = b^2 - a^2 = (b-a)(a+b) = (b-a)c$ であるから、括弧の中は $c\,q(x_n)$ に等しく、したがって

$$x_{n+4} = x_n \iff (a^2 + b^2 - 2)\,(a+b)\,q(x_n) = 0.$$

必要性（necessity）。周期が 4 であると仮定する。数列は定数列ではないので、x_0 は不動点ではなく、$q(x_0) \neq 0$ である。もし $a + b = 0$ ならば、小問 (i) の逆により $x_2 = x_0$ となり、実際すべての n について $x_{n+2} = x_n$ となって、周期 4 に矛盾する。よって $a + b \neq 0$ であり、$n = 0$ としたときの因数分解から

$$a^2 + b^2 = 2.$$

でなければならない。

十分性（sufficiency）。$a^2 + b^2 = 2$ と仮定する。このとき $A + B = 0$ であるから、すべての n について $x_{n+4} = x_n$ が成り立つ。これより小さい m では成り立たないことを確かめなければならない。

- $a + b \neq 0$ である。そうでなければ $a^2 = b^2 = 1$ となり、小問 (i) と同様に $x_1 + b = 0$ となって、これは除外されているからである。
- 実数の不動点は存在しない。q の判別式（discriminant）は $(b-a)^2 - 4 = (a^2 + b^2) - 2ab - 4 = -2(1+ab)$ であり、$|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2) = 1$ である。ここで $ab = -1$ となるのは $(a, b) = \pm(1, -1)$ のときに限られるが、これはすぐ上で除外した。よって $ab > -1$ であり、判別式は負で、すべての実数 x_n について $q(x_n) \neq 0$ である。ゆえに $m = 1$ は成り立たない。
- $m = 2$ について：小問 (i) より、$x_2 = x_0$ となるには $(a+b)q(x_0) = 0$ が必要であるが、これは偽である。よって $m = 2$ は成り立たない。
- $m = 3$ について：すべての n について $x_{n+3} = x_n$ ならば、すべての n について $x_{n+1} = x_{(n+1)+3} = x_{n+4} = x_n$ となり、周期 1 となるが、これはすぐ上で否定した。

したがって、実数 a、b、x_0（問題文が認めるとおり、分母は 0 でないとする）について、数列が周期 4 をもつための必要十分条件は

$$\boxed{a^2 + b^2 = 2.}$$

である。初期値 x_0 はこの条件に何の役割も果たさない。

検算

$a=\sqrt{2}, b=0, x_0=1$ とする。数列は

$$1,\quad \sqrt{2}-1,\quad -1,\quad \sqrt{2}+1,\quad 1,\ \ldots$$

となり、周期はちょうど 4 である。たとえば $f(-1)=(-\sqrt{2}-1)/(-1)=\sqrt{2}+1$ である。コンピュータによる検算で、ランダムに選んだ数千組の有理数 a, b, x_0 について、2 ステップの式と 4 ステップの式が厳密に正しいことを確認した。また、円 $a^2+b^2=2$ 上のランダムな約 2000 点について周期が 4 であることを確かめ、この円上にないランダムな (a,b) については 4 ステップ後に元に戻らないことも確かめた。

よくある間違い

- $q(x_0)\neq 0$ である理由を説明せずに、$(a+b)q(x_0)=0$ から $a+b=0$ と結論してしまう。その理由は不動点としての解釈にある。
- 周期が実は 1 や 2 でないことを確かめずに、周期 4 の答えとして $a^2+b^2=2$ を挙げてしまう。
- 小問 (ii) の括弧の中の因数 $a+b$ を落としてしまい、周期 2 の場合である $a+b=0$ が誤って周期 4 を与えるように見えてしまう。

STEP のその先へ

写像 $x\mapsto \dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ は**メビウス変換**（Möbius transformation）と呼ばれる。このような写像を二つ合成することは、それぞれの 2×2 行列（ここでは $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$）を掛け合わせることに対応する。写像が周期 k をもつのは、行列の k 乗が単位行列（identity matrix）のスカラー倍になるときであり、それは比 $(\text{トレース})^2/\det=(a+b)^2/(ab+1)$ によって決まる。周期 4 はこの値が 2 の場合に対応し、姿を変えた「$\pi/4$ の回転」である。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ビジュアル複素解析』）にはメビウス変換についての見事な章があり、Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）はその背後にある固有値（eigenvalue）の考え方を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。