解答例

STEP II 2017、第 12 問

確率・統計 ・ ポアソン過程

> **STEP II 2017、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q12

鍵となる考え方

魚が釣れる様子を表す独立な 2 つのポアソン（Poisson）的な流れは合流して 1 つのポアソン的な流れになり、その率は 2 つの率の和になる。これが (i) の畳み込み（convolution）が示していることである。時刻に関する問いでは、最初の魚が**いつ**来るかについての命題を、魚が**何匹**釣れたかについての命題に言い換える。「Adam の最初の魚は時刻 t より後に来る」とは、まさに「Adam は $[0,t]$ で 1 匹も釣らない」ということであり、その確率はポアソン分布の公式からただちに得られる。

解答

以下を通して、X と Y は長さ T の区間において Adam と Eve が釣る魚の数とする。したがって $X \sim \mathrm{Po}(\lambda T)$、$Y \sim \mathrm{Po}(\mu T)$ であり、両者は独立（independent）である。

小問 (i)

整数 $r \geq 0$ に対して、事象 $X+Y=r$ は $j=0,1,\ldots,r$ についての互いに排反な事象 $\{X=j,\, Y=r-j\}$ に分割される。独立性を用いると、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X+Y=r) &= \sum_{j=0}^{r} \mathrm{P}(X=j)\,\mathrm{P}(Y=r-j) = \sum_{j=0}^{r} \frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^j}{j!} \cdot \frac{e^{-\mu T}(\mu T)^{r-j}}{(r-j)!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)T}}{r!} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (\lambda T)^j (\mu T)^{r-j} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)T}((\lambda+\mu)T)^r}{r!},\end{aligned}$$

となる。ここでは $r!$ を掛けて割り、そのあと二項定理（binomial theorem）を用いた。これは $\mathrm{Po}((\lambda+\mu)T)$ の確率であるから、時間 T における釣果の合計はパラメー

タ $(\lambda+\mu)T$ のポアソン分布（Poisson distribution）に従う。

小問 (ii)

$0 \le r \le k$ に対して、

$$\mathrm{P}(X=r \mid X+Y=k) = \frac{\mathrm{P}(X=r,\, Y=k-r)}{\mathrm{P}(X+Y=k)} = \frac{\dfrac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^r}{r!} \cdot \dfrac{e^{-\mu T}(\mu T)^{k-r}}{(k-r)!}}{\dfrac{e^{-(\lambda+\mu)T}((\lambda+\mu)T)^k}{k!}},$$

である。分母には小問 (i) を用いた。指数関数は約分され、T のべきも約分される（分子に $r+(k-r)=k$ 個、分母に k 個ある）。残るのは

$$\mathrm{P}(X=r \mid X+Y=k) = \binom{k}{r}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^r\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{k-r}.$$

である。したがって、合計が k であるという条件のもとで、Adam の釣果は $\mathrm{B}(k,\, \frac{\lambda}{\lambda+\mu})$ に従う。実質的には、k 匹の魚のそれぞれが独立に確率 $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ で Adam のものになるということである。T が消えていることに注意しよう。

小問 (iii)

A と E を、開始時点から測って Adam と Eve がそれぞれ最初の魚を釣る時刻とする。Adam の最初の魚が時刻 t より後に来るのは、ちょうど $[0,t]$ で何も釣らないときであるから、

$$\mathrm{P}(A>t) = \mathrm{P}(\mathrm{Po}(\lambda t)=0) = e^{-\lambda t}, \qquad \text{同様に} \qquad \mathrm{P}(E>t) = e^{-\mu t}.$$

となる。よって A は $t \ge 0$ において確率密度関数（probability density function）$\lambda e^{-\lambda t}$ をもち（$1-e^{-\lambda t}$ を微分すればよい）、2 人の釣果が独立であるから A と E も独立である。

> **考えてみよう** A の密度関数と E の確率を、どのように組み合わせればよいだろうか。

A の値で条件付ける。Adam の最初の魚が時刻 t に来たとすると、彼が先になるのはちょうど $E>t$ のときであり、独立性からその確率は $e^{-\mu t}$ である。すべての t について足し合わせると、

$$\mathrm{P}(A<E) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\, e^{-\mu t}\, \mathrm{d}t = \lambda\left[\frac{-e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda+\mu}\right]_0^\infty = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

となる（E は連続分布に従うので、同時になる確率は 0 である）。したがって、最初の魚が Adam のものである確率は $\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$ であり、これは (ii) の二項分布のパラメータと同じである。

小問 (iv)

求めたいのは $\mathrm{E}(M)$ である。ここで $M = \max(A, E)$ は 2 人とも魚を釣り終えている時刻である。$m = \min(A, E)$ を、2 人のどちらかが最初の魚を釣る時刻とする。任意の 2 数について max + min はそれらの和であるから、

$$M = A + E - m \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{E}(M) = \mathrm{E}(A) + \mathrm{E}(E) - \mathrm{E}(m).$$

$\mathrm{E}(A)$ と $\mathrm{E}(E)$。開始時点から見た Adam の釣果は、任意の 1 匹を釣った瞬間から見たものと同じ種類の過程をなす。したがって最初の魚までの待ち時間の期待値（expectation）は、与えられた間隔の期待値と同じで $\mathrm{E}(A) = \lambda^{-1}$ であり、同様に $\mathrm{E}(E) = \mu^{-1}$ である（直接計算すると、部分積分（integration by parts）により $\mathrm{E}(A) = \int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \lambda^{-1}$ となる）。

> **考えてみよう** 「2 人のどちらかが釣る最初の魚」とは、どのような種類の過程だろうか。

小問 (i) より、長さ t の任意の区間における 2 人の釣果の合計は $\mathrm{Po}((\lambda+\mu)t)$ に従う。したがって合計の釣果は Adam の釣果とまったく同じ種類の過程であり、ただ λ の代わりに率が $\lambda + \mu$ になっている。よって最初の魚までの待ち時間の期待値は $\mathrm{E}(m) = (\lambda+\mu)^{-1}$ である（直接計算すると $\mathrm{P}(m > t) = \mathrm{P}(A > t)\,\mathrm{P}(E > t) = e^{-(\lambda+\mu)t}$ となる）。ゆえに

$$\mathrm{E}(M) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2}{\lambda\mu(\lambda+\mu)}.$$

検算

- $\lambda = \mu$ のとき、小問 (iii) は対称性から当然そうあるべきとおり $\frac{1}{2}$ を与え、小問 (iv) は $\frac{3}{2\lambda}$ を与える。これは、最初の魚まで $\frac{1}{2\lambda}$ 待ち、同じ「新たな出発」の考え方により、もう 1 人のためにさらに $\frac{1}{\lambda}$ 待つということである。
- $\mu \to \infty$（Eve が瞬時に魚を釣る）のとき、小問 (iv) の値は Adam が 1 人で要する時間 $\frac{1}{\lambda}$ に近づく。
- $\frac{1}{\mu} > \frac{1}{\lambda+\mu}$ であるから、(iv) の答えは当然そうあるべきとおり $\max(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\mu})$ 以上である。
- $\lambda = 1.3$、$\mu = 0.7$ のとき、公式は 0.65 と 1.6978 を与える。2×10^5 回の釣りをコンピュータでシミュレーションしたところ、0.651 と 1.700 が得られた。

よくある間違い

- (iv) で $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}$ と足してしまったり、$\max\left(\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\mu}\right)$ をとってしまったりすること。最大値の期待値はそのどちらでもない。
- (ii) で $\mathrm{P}(X+Y=k)$ で割るのを忘れること。この割り算こそが、同時確率を条件付き確率（conditional probability）に変えるものである。

STEP のその先へ

ここで出会ったのは**ポアソン過程**（Poisson process）である。事象の間の待ち時間は指数分布（exponential distribution）に従い無記憶性（memoryless）をもつこと、独立なポアソン過程は重ね合わせると再びポアソン過程になること、そして各事象はその率に比例する確率で独立にラベル付けされること（逆の操作である「間引き」（thinning）も成り立つ）。これらの事実は、待ち行列理論（queueing theory）や連続時間マルコフ連鎖（continuous-time Markov chains）の基礎である。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、この問題から自然につながる形でポアソン過程と指数分布を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。