解答例

STEP II 2017、第 11 問

力学 ・ 放物運動とエネルギー

STEP II 2017、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

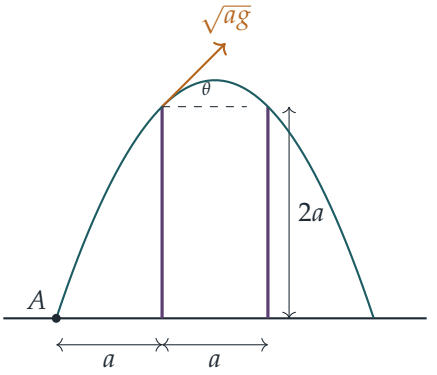
step.maths.org/questions/17-s2-q11

鍵となる考え方

粒子が第 1 の壁の上端と同じ高さに達した時点から、残りの飛行は新たな放物運動（projectile motion）の問題になる。すなわち、粒子は既知の速さで高さ $2a$ から出発し、水平距離 a だけ進んだ後もなお高さ $2a$ 以上になければならない。その速さは、投射角を知らなくてもエネルギーから求められる。軌道を $\tan\theta$ を用いて表すと、「第 2 の壁を越えられるか？」という問いは「$\tan\theta$ の二次式（quadratic）が実数解をもつか？」という問いに変わり、これで両方の小問を一度に扱える。

解答

各粒子を、空気抵抗（air resistance）のない状態で重力のみを受けて自由に運動する質点（point mass）とみなす。x を水平方向（壁に向かう向き）、y を鉛直上向きにとる。



小問 (i)

第 1 の壁の上での速さ。仕事をするのは重力だけなので、運動エネルギー（kinetic energy）と位置エネルギー（potential energy）の和は一定である。地面から高さ $2a$ まで上昇し、壁の上端での速さを v とすると、

$$\tfrac{1}{2}m(5ag) = \tfrac{1}{2}mv^2 + mg(2a) \quad \Longrightarrow \quad v^2 = 5ag - 4ag = ag,$$

となるので、粒子は速さ $\sqrt{ag}$ で第 1 の壁の上を通過する。

角度。粒子が第 1 の壁の上を通過するとき、速度が水平方向より上向きに角 θ をなすとする。粒子はその後（第 2 の壁の上で）再び高さ $2a$ にあるから、この時点ではまだ上昇中でなければならず、$\theta > 0$ である。第 1 の壁の上端を基準にとると、水平距離 X だけ進んだ後の、壁の上端の高さからの高さは

$$Y = X\tan\theta - \frac{gX^2}{2v^2\cos^2\theta} = X\tan\theta - \frac{X^2}{2a}\left(1+\tan^2\theta\right),$$

である。ここで $v^2 = ag$ と $\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$ を用いた。第 2 の壁をぎりぎり越えるとは、$X = a$ で $Y = 0$ となることである：

$$a\tan\theta - \tfrac{a}{2}(1+\tan^2\theta) = 0 \iff \tan^2\theta - 2\tan\theta + 1 = 0 \iff (\tan\theta - 1)^2 = 0.$$

よって $\tan\theta = 1$、すなわち $\theta = 45^\circ$ であり、これが示すべきことであった。（同値な見方：高さ $2a$ から同じ高さ $2a$ に戻るまでの水平到達距離（range）は $v^2\sin 2\theta/g = a\sin 2\theta$ であり、これが a に等しくなるのは $\sin 2\theta = 1$ のときに限る。）

A までの距離。速度の水平成分は変化せず、第 1 の壁の上では $\sqrt{ag}\cos 45^\circ = \sqrt{ag/2}$ である。そこでの鉛直成分も上向きに $\sqrt{ag/2}$ である。A における鉛直成分 u は $u^2 = \frac{1}{2}ag + 2g(2a) = \frac{9}{2}ag$ を満たすので、$u = 3\sqrt{ag/2}$ である。（検算として、$\frac{1}{2}ag + \frac{9}{2}ag = 5ag$ となり、投射時の速さと一致する。）A から第 1 の壁までにかかる時間は

$$t = \frac{u - \sqrt{ag/2}}{g} = \frac{2\sqrt{ag/2}}{g},$$

であり、その間に進む水平距離は

$$\sqrt{\tfrac{ag}{2}}\cdot\frac{2\sqrt{ag/2}}{g} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}ag}{g} = a.$$

である。よって A は第 1 の壁の根元から距離 a の位置にある。

小問 (ii)

今度は粒子が第 1 の壁の上を高さ $2a+h$ で通過するとする。エネルギーより、そこでの速さ w は

$$w^2 = 5ag - 2g(2a+h) = g(a-2h).$$

を満たす。粒子は壁に向かって運動するので、水平方向の速度は 0 でなく、$w^2 > 0$ である。したがって $h < \frac{1}{2}a$ である。

そこでの運動方向が水平方向となす角を ϕ とし、$T = \tan\phi$ とおく。第 1 の壁の上での粒子の位置を基準にとると、水平距離 X だけ進んだ後の、その点からの高さは

$$Y = XT - \frac{gX^2}{2w^2}(1+T^2) = XT - kX^2(1+T^2)/a^2, \qquad \text{ただし} k = \frac{ga^2}{2w^2} = \frac{a^2}{2(a-2h)}.$$

である。第 2 の壁では $X = a$ なので、$Y = aT - k(1+T^2)$ となる。この壁を越えるには、粒子が高さ $2a$ 以上になければならない。すなわち $Y \geq -h$ である：

$$aT - k(1+T^2) + h \geq 0 \iff kT^2 - aT + (k-h) \leq 0.$$

考えてみよう ϕ はわからない。どの方向でもうまくいかないことは、どうすれば示せるだろうか？

$k > 0$ なので、二次式 $kT^2 - aT + (k-h)$ のグラフは下に凸である。ある実数 T に対してこの値が ≤ 0 となるのは、判別式（discriminant）が非負のときに限る。その判別式は

$$\Delta = a^2 - 4k(k-h) = a^2 - \frac{a^4}{(a-2h)^2} + \frac{2a^2h}{a-2h}.$$

である。正の量 $(a-2h)^2/a^2$ を掛けると、

$$\frac{(a-2h)^2}{a^2}\Delta = (a-2h)^2 - a^2 + 2h(a-2h) = -2ah.$$

となる。$a > 0$ かつ $h > 0$ なので、これは負であり、$\Delta < 0$ である。よってすべての実数 T に対して $kT^2 - aT + (k-h) > 0$ であるから、第 1 の壁の上で粒子がどの方向に進んでいても、第 2 の壁に達したとき粒子は高さ $2a$ より下にある。したがって粒子は第 2 の壁を越えない。

$h = 0$ とすると $\Delta = 0$ となり、重解（double root）$T = a/(2k) = 1$ が得られることに注意しよう。これはちょうど小問 (i) の 45° である。

検算

- 小問 (i) において、A での速度成分は $\sqrt{ag/2}$ と $3\sqrt{ag/2}$ であり、その 2 乗の和は $5ag$ となる。$a = 1.7\,\mathrm{m}$、$g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ として A から運動を時間刻みで追うと、両方の壁の位置で高さ $2.000a$ が得られる。
- 軌道は最高点に関して対称であり、小問 (i) ではその最高点は 2 つの壁のちょうど中間、A から水平距離 $1.5a$ の位置にある。よって粒子は A から $3a$ の地点、すなわち第 2 の壁から距離 a だけ先に着地する。図は対称になっている。

- 小問 (ii) については、速さ $\sqrt{5ag}$ で投射角と投射点を無作為に何千通りも選んでコンピュータで調べたところ、第 1 の壁の上を通過し、かつ第 2 の壁も越えるものは 1 つも見つからなかった。

よくある間違い

- 小問 (i) の θ が第 1 の壁の上での角度であって、A での投射角（こちらは $\tan\alpha = 3$ を満たす）ではないことを忘れる。
- 小問 (ii) で、ある特定の角度（たとえば 45°）だけを調べる。主張はあらゆる方向についてのものであり、だからこそ判別式が必要になる。

STEP のその先へ

小問 (ii) が述べているのは、第 1 の壁の上の点から、このエネルギーをもつ粒子は第 2 の壁の上端にぎりぎり届くのが精一杯だということである。つまり、その壁の上端は到達可能な領域の境界上にある。与えられた点から与えられた速さで到達できる点はすべて、**包絡線**（envelope）あるいは**安全放物線**（safety parabola）と呼ばれる放物線の内側にあり、その放物線上の点にはちょうど 1 本の軌道（trajectory）だけが到達する。これがここで見た重解である。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、放物運動とエネルギーを用いる方法を大学 1 年次の水準で扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。