解答例

STEP II 2017、第 10 問

力学 ・ 抵抗に逆らってする仕事

> **STEP II 2017、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q10

鍵となる考え方

ニュートン（Newton）の第二法則（second law）から各点での駆動力（driving force）が求まり、エンジンのする仕事（work）はその力を距離について積分（integral）したものである。加速度（acceleration）が一定のとき、$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = a$ を用いると x についての積分を v についての積分に書き換えられる。唯一の微妙な点は、エンジンは押すことはできても引くことはできないということである。必要な力が負になると、その役目はブレーキ（brakes）が担い、エンジンは何も寄与しない。したがって、駆動力が正である区間でのみ積分する。

解答

車を x 軸上を動く質点（particle）とみなし、エンジンによる駆動力を F とする。車が前進している間、抵抗（resistance）$Av^2 + R$ が後ろ向きにはたらく。

前半。 ニュートンの第二法則より $F - (Av^2 + R) = ma$ であるから、

$$F = ma + R + Av^2,$$

となり、これは全区間で正である。力 F がその作用点（point of application）を $\mathrm{d}x$ だけ動かすときにする仕事は $F\,\mathrm{d}x$ であるから、前半でエンジンのする仕事は

$$\int_0^d (ma + R + Av^2)\,\mathrm{d}x,$$

となり、題意が示された。変数変換（change of variable）については、加速度が $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = a$ であるから $\mathrm{d}x = \frac{v}{a}\,\mathrm{d}v$ である。$v^2 = 2ax$（静止状態からの等加速度運動）であるから、

v は $x=0$ における 0 から $x=d$ における $\sqrt{2ad}=w$ まで変化する。よって仕事は

$$\int_0^w \frac{(ma+R+Av^2)\,v}{a}\,\mathrm{d}v,$$

となり、題意が示された。これを計算し、$w^2=2ad$ を用いると、

$$W_1=\frac{1}{a}\left[\frac{(ma+R)v^2}{2}+\frac{Av^4}{4}\right]_0^w=\frac{(ma+R)w^2}{2a}+\frac{Aw^4}{4a}=(ma+R)d+Aad^2.$$

後半。 今度は加速度が $-a$ であるから $F-(Av^2+R)=-ma$ となり、

$$F=Av^2+R-ma.$$

を得る。車は速さ w から 0 まで減速し、$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-a$ であるから $\mathrm{d}x=-\frac{v}{a}\mathrm{d}v$ である。$F>0$ であり、速さが v_1 から v_2 まで（$v_1>v_2$）減少する任意の区間において、エンジンのする仕事は

$$\int_{v_1}^{v_2} F\left(-\frac{v}{a}\right)\mathrm{d}v=\int_{v_2}^{v_1}\frac{(Av^2+R-ma)\,v}{a}\,\mathrm{d}v. \qquad (*)$$

である。

小問 (i)

$R>ma$ ならば、すべての v に対して $F=Av^2+(R-ma)>0$ であるから、エンジンは後半の全区間で仕事をする。$(*)$ で $v_1=w$、$v_2=0$ とすると、

$$W_2=\frac{1}{a}\left[\frac{(R-ma)v^2}{2}+\frac{Av^4}{4}\right]_0^w=(R-ma)d+Aad^2.$$

これらを足すと $ma\,d$ の項が打ち消し合い、仕事の総和は

$$W_1+W_2=2Aad^2+2Rd,$$

となり、題意が示された。

小問 (ii)

今度は $R<ma$ であるから、$F=Av^2-(ma-R)$ が 0 になるのはちょうど

$$v=u,\qquad \text{ただし} u^2=\frac{ma-R}{A}>0.$$

のときである。この速さが後半で実際に達成されるのは $u<w$、すなわち $\frac{ma-R}{A}<2ad$ のときであり、これはまさに条件 $R>ma-2Aad$ にほかならない。したがって、車が w から 0 まで減速する間、F は $v>u$ では正、速さ u で 0 となり、$v<u$ では負（ブレーキをかけている状態）である。これで最初の主張が示された。

考えてみよう なぜ (i) の答えをそのまま使えないのだろうか。

(i) の積分は後半全体にわたって $F\,\mathrm{d}x$ を足し合わせている。ここでは $v < u$ で F が負になり、その区間は総和から**差し引かれて**しまう。しかし、エンジンはそこで負の仕事をしているわけではない。エンジンは何もしておらず、ブレーキが代わりに働いているのである。そこで積分を $v = u$ で打ち切る。$(*)$ で $v_1 = w$、$v_2 = u$ とすると、

$$\begin{aligned} W_2 &= \frac{1}{a}\left[\frac{(R-ma)v^2}{2} + \frac{Av^4}{4}\right]_u^w \\ &= (R-ma)d + Aad^2 - \frac{1}{a}\left(\frac{(R-ma)u^2}{2} + \frac{Au^4}{4}\right). \end{aligned}$$

$Au^2 = ma - R$ を代入すると、括弧内は

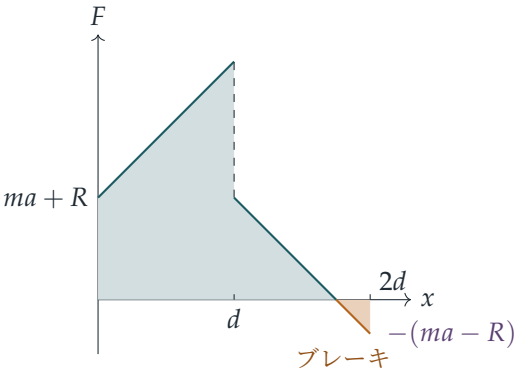
$$-\frac{(ma-R)^2}{2A} + \frac{(ma-R)^2}{4A} = -\frac{(ma-R)^2}{4A},$$

となるので、$W_2 = (R-ma)d + Aad^2 + \frac{(ma-R)^2}{4Aa}$ である。前半は変わらない（そこでは常に $F > 0$）から、総和は

$$W_1 + W_2 = 2Aad^2 + 2Rd + \frac{(ma-R)^2}{4Aa},$$

となり、題意が示された。

図で見る。 前半では $v^2 = 2ax$、後半では $v^2 = 2a(2d-x)$ であるから、F はそれぞれの区間で x の**一次**関数（linear function）であり、エンジンのする仕事はグラフの正の部分の下側の面積に等しい。(ii) の場合、グラフは終点近くで軸の下に沈み込む。取り除かれる三角形の高さは $ma - R$ であり、F は単位距離あたり $2Aa$ の割合で減少するから、底辺は $\frac{ma-R}{2Aa}$ である。その面積 $\frac{(ma-R)^2}{4Aa}$ がちょうど追加の項になっている。



検算

- 境界 $R = ma$ では追加の項が消えるので、(i) と (ii) の答えは一致する。このとき F は終点でちょうど 0 に達するだけなので、一致するのは当然である。
- もう一方の境界 $R = ma - 2Aad$ では $u = w$ となり、エンジンは後半で何もしないので、総和は $W_1 = (ma + R)d + Aad^2$ となるはずである。(ii) の答えに $ma - R = 2Aad$ を代入すると $2Aad^2 + 2Rd + Aad^2 = 2Rd + 3Aad^2$ となり、一方 $(ma + R)d + Aad^2 = 2Rd + 2Aad^2 + Aad^2$ でもあるから、両者は一致する。
- 数値的には、$m = a = 1$、$A = \frac{1}{2}$、$d = 2$、$R = \frac{1}{2}$（上の図の場合）とすると、(ii) の公式は $4 + 2 + \frac{1}{8} = 6.125$ を与え、全行程にわたって F の正の部分を直接数値積分しても同じ値が得られる。
- 単位：Aad^2、Rd、$(ma - R)^2/(Aa)$ はいずれも力と距離の積であるから、すべてエネルギーである。

よくある間違い

- 後半で $\mathrm{d}x = -\frac{v}{a}\,\mathrm{d}v$ となり、積分の上端と下端が入れ替わることを忘れる。ここで符号を誤ると、後半の仕事が負になってしまう。
- (ii) で F の負の部分まで積分してしまう。これでは (i) の答えがそのまま再現されるだけである。
- 車が止まる前に速さ u に実際に達するかどうかを確認しない。それを保証しているのが R の下限である。

STEP のその先へ

力のする仕事は線積分（line integral）$\int \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ であり、ここで用いた変数変換は仕事とエネルギーの定理（work–energy theorem）の一次元版である。Av^2 のような抵抗は保存力（conservative force）ではないので、仕事は出発点と到着点だけでなく、どのように運転したかによって決まる。エンジンの「一方向にしか働かない」性質は、与えられた距離を最も燃料効率よく走る方法を求めるといった最適制御（optimal control）問題に現れる制約の、ささやかな先取りである。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、仕事、エネルギー、速度に依存する力を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。