解答例

# STEP II 2017、第 1 問

純粋数学 • 漸化式による積分

> **STEP II 2017、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q1

## 鍵となる考え方

被積分関数（integrand）のうち扱いにくいのは $\arctan x$ の部分であるが、その導関数（derivative）は有理関数（rational function）なので、$u = \arctan x$ として部分積分（integration by parts）を行えば、これを $\frac{1}{1+x^2}$ に置き換えられる。次に (ii) での工夫は、2 つの積分を組にして、分子をまとめると $x^{n+1}(1+x^2)$ となり厄介な分母が約分されて消えるようにすることである。こうして $n$ を 2 ずつ進める漸化式（reduction formula）が得られ、これを 2 回使えば $n$ が 4 だけ進む。これこそが (iii) の数学的帰納法（induction）に必要なものである。

## 解答

### 小問 (i)

$u = \arctan x$、$\mathrm{d}v = x^n \,\mathrm{d}x$ として部分積分を行う。すると $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ である（$n \geq 0$ なので問題ない）：

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\arctan x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

ここで $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ を用い、また境界項が $x = 0$ で消えることを用いた。両辺に $n+1$ を掛ければ、求める結果が得られる：

$$(n+1)I_n = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

$n = 0$ のとき、残った積分は $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$ であるから、

$$I_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

**小問 (ii)**

(i) に $n+2$ を $n$ の代わりに代入した式を、(i) の式そのものに加えると：

$$\begin{aligned}(n+3)I_{n+2} + (n+1)I_n &= \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \frac{x^{n+3} + x^{n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2} - \int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n+2},\end{aligned}$$

ここで $x^{n+3} + x^{n+1} = x^{n+1}(1+x^2)$ であることを用いた。

**考えてみよう** この公式は $I_4$ と $I_2$ を、また $I_2$ と $I_0$ を結びつける。どの $n$ の値が必要か？

必要なのは $n = 0$ と $n = 2$ である：

$$\begin{aligned}n = 0: &\quad 3I_2 + I_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}, \\ n = 2: &\quad 5I_4 + 3I_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

2 番目の式から 1 番目の式を引くと $I_2$ が消える：

$$5I_4 = I_0 + \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln 2, \qquad \text{よって} \qquad I_4 = \frac{\pi + 1 - 2\ln 2}{20}.$$

**小問 (iii)**

簡単のため $S_n = \sum_{r=1}^{2n} \frac{(-1)^r}{r}$ と書く。

**$A$ を求める。** $n = 1$ のとき $S_1 = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ であるから、主張は $5I_4 = A + \frac{1}{4}$ となる。(ii) より $5I_4 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$ であるから、次のようにとらなければならない：

$$A = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 \;(= I_0),$$

この値のとき、主張は $n = 1$ で成り立つ。

**帰納法のステップ。** ある $k \geq 1$ に対して $(4k+1)I_{4k} = A - \frac{1}{2}S_k$ が成り立つと仮定する。目標は $I_{4k+4}$ に到達することであり、これは (ii) の公式を 2 回適用した先にある。

$n = 4k+2$ と $n = 4k$ とすると、公式から

$$(4k+5)I_{4k+4} + (4k+3)I_{4k+2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4k+4},$$
$$(4k+3)I_{4k+2} + (4k+1)I_{4k} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4k+2}.$$

**考えてみよう** 不要な $I_{4k+2}$ はどうすれば消せるか？

これは両方の式に同じ係数で現れるので、1 番目の式から 2 番目の式を引けば消える：

$$(4k+5)I_{4k+4} = (4k+1)I_{4k} + \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+4}.$$

一方、$S_{k+1}$ は $S_k$ より項が 2 つ多く、それは $r = 2k+1$（奇数なので負）と $r = 2k+2$（偶数なので正）の項である：

$$-\frac{1}{2}S_{k+1} = -\frac{1}{2}S_k - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}\right) = -\frac{1}{2}S_k + \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+4}.$$

帰納法の仮定（inductive hypothesis）を用いると、

$$(4k+5)I_{4k+4} = A - \frac{1}{2}S_k + \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+4} = A - \frac{1}{2}S_{k+1},$$

これは $n = k+1$ のときの主張である。$n = 1$ で成り立つから、数学的帰納法によりすべての $n \geq 1$ で成り立つ。ただし $A = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$ である。

## 検算

- 数値的には $I_0 \approx 0.438825$、$I_4 \approx 0.137765$ であり、元の積分にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用した値と小数第 10 位まで一致する。
- $A$ は $I_0$ に等しいので、(iii) の公式は $n = 0$ でも成り立つ（このとき和は空である）。よい兆候である。
- $n \to \infty$ のとき、(i) の積分は 0 に収束（converge）する（被積分関数は $x^{n+1}$ 以下である）ので、$(4n+1)I_{4n} \to \frac{\pi}{4}$ となる。一方 $S_n \to -\ln 2$ であるから、右辺は $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\pi}{4}$ に収束する。極限において両辺は一致する。

## よくある間違い

- $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ と書いたのに、2 番目の積分も $n+1$ で割るのを忘れる。
- 交代和の新しい 2 項の符号を間違える。$r = 2k+1$ は奇数なので $(-1)^r = -1$ である。

- 初期段階（base case）から先に $A$ を決めないまま、帰納法のステップを証明しようとする。

## STEP のその先へ

最後の検算では交代調和級数（alternating harmonic series）$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots=\ln 2$ を用いたが、実はこの問題は事実上これを証明している。(iii) の恒等式と $(4n+1)I_{4n}\to\frac{\pi}{4}$ という事実を合わせると、部分和（partial sums）は $\ln 2$ に収束せざるを得ないのである。$\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ のようにゼロへと小さくなっていく積分を扱うことは、級数の誤差を制御する標準的な方法であり、解析学（analysis）の最初の講義で出会うことになる。Abbott の *Understanding Analysis* は、こうした極限がどのように厳密に扱われるかを知るのに親しみやすい本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。