解答例

STEP I 2017、第 9 問

力学 ・ 放物運動

STEP I 2017、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

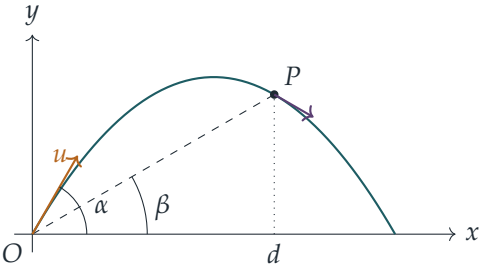
step.maths.org/questions/17-s1-q9

鍵となる考え方

軌道の方程式（trajectory equation）を書き下し、それが P を通るようにする。すると u^2 が投射角（angle of projection）だけの関数として得られる。扱いやすい変数は $T = \tan\alpha$ である。$\sec^2\alpha = 1 + T^2$ により、すべてが T の有理関数（rational function）になるからである。その関数の最小化はふつうの微分の計算で済み、停留点（stationary point）の方程式は、実は倍角公式（double-angle formula）が姿を変えたものであることがわかる。

解答

粒子は重力のみを受けて自由に運動する（空気抵抗（air resistance）はない）とモデル化し、O を原点、x を P に向かう水平方向、y を鉛直上向きにとる。$T = \tan\alpha$、$k = \tan\beta > 0$ とおく。



小問 (i)

水平方向の速度は $u\cos\alpha$ であるから、粒子は時刻 $t = x/(u\cos\alpha)$ に水平距離 x に達し、そのときの高さは

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha} = xT - \frac{gx^2(1+T^2)}{2u^2}.$$

である。$P = (d, dk)$ を通ることは

$$dk = dT - \frac{gd^2(1+T^2)}{2u^2} \quad \Longrightarrow \quad u^2 = \frac{gd}{2}\cdot\frac{1+T^2}{T-k}.$$

を意味する。右辺は正でなければならないので、可能なのは $T > k$、すなわち $\alpha > \beta$ を満たす角だけである。これは納得がいく。P より上を狙わなければならないのである。したがって、最小化すべきものは

$$f(T) = \frac{1+T^2}{T-k} \qquad (T > k).$$

である。商の微分法（quotient rule）により

$$f'(T) = \frac{2T(T-k) - (1+T^2)}{(T-k)^2} = \frac{T^2 - 2kT - 1}{(T-k)^2}.$$

分子は $T = k \pm \sqrt{k^2+1}$ で 0 となる。k より大きいのは $+$ の根だけである。$T \to k^+$ のときも $T \to \infty$ のときも $f(T) \to \infty$ であり、その間に停留点はただ一つしかないので、その点で最小となる。よって最適な α は

$$T^2 - 2kT - 1 = 0. \qquad (*)$$

を満たす。

> **考えてみよう** 根号を含む値を代入せずに、最小点における $f(T)$ をどう簡単にすればよいか。

$(*)$ を使って書き換える。$(*)$ から $k = \dfrac{T^2-1}{2T}$ が得られるので、

$$T - k = \frac{2T^2 - T^2 + 1}{2T} = \frac{1+T^2}{2T}, \qquad \text{したがって} \qquad f(T) = \frac{1+T^2}{(1+T^2)/(2T)} = 2T.$$

ゆえに

$$u^2 = \frac{gd}{2}\cdot 2T = gd\tan\alpha,$$

となり、示すべきことが示された。

角については、$(*)$ を $k = \dfrac{T^2-1}{2T}$ の形で読むと

$$\tan\beta = -\frac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha} = -\cot 2\alpha = \tan(2\alpha - 90^\circ),$$

となる。ここで $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ と $-\cot\theta = \tan(\theta - 90^\circ)$ を用いた。（$\alpha = 45^\circ$ ならば $(*)$ から $k = 0$ となるが、$\beta > 0$ よりこれは除外されるので、$\cot 2\alpha$ は定義されている。）$0^\circ < \alpha < 90^\circ$ であるから、角 $2\alpha - 90^\circ$ は β と同じく $(-90^\circ, 90^\circ)$ に属し、tan はこの区間で一対一（one-to-one）である。よって $\beta = 2\alpha - 90^\circ$、すなわち

$$2\alpha = \beta + 90^\circ.$$

である。言葉で言えば、最良の投射方向は、直線 OP と鉛直上向きとのなす角を二等分（bisect）する。

小問 (ii)

P においても水平方向の速度は $u\cos\alpha$ のままである。かかる時間は $d/(u\cos\alpha)$ であるから、鉛直方向の速度は

$$v_y = u\sin\alpha - \frac{gd}{u\cos\alpha}.$$

である。P において粒子が水平より角 θ だけ上向きに運動しているとすると、

$$\tan\theta = \frac{v_y}{u\cos\alpha} = \tan\alpha - \frac{gd}{u^2\cos^2\alpha} = T - \frac{gd(1+T^2)}{gdT} = T - \frac{1+T^2}{T} = -\frac{1}{T} = -\cot\alpha,$$

となる。ここで小問 (i) の $u^2 = gdT$ を用いた。よって $\tan\theta = \tan(\alpha - 90^\circ)$ であり、θ は -90° と 90° の間にあるので $\theta = \alpha - 90^\circ$ である。

粒子は P を通過するとき**下向き**に、水平より $90^\circ - \alpha$ だけ下の角で運動している。P における運動の向きは、投射の向きに垂直である。

検算

- $\beta = 30^\circ$ とする。すると $\alpha = 60^\circ$、$u^2 = \sqrt{3}\,gd$ である。直接計算すると、$T = \sqrt{3}$ における $f(T)$ は $4/(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}) = 2\sqrt{3}$ であり、$2T$ と一致する。最後の向きは、図のとおり水平より 30° 下である。
- $\beta \to 0$ とすると $\alpha \to 45^\circ$、$u^2 \to gd$ となる。これは、水平な地面での最大到達距離 u^2/g が 45° の投射で得られるというよく知られた事実である。このとき粒子は水平より 45° 下の向きで着地し、やはり発射の向きに垂直である。
- d と β を無作為に 200 通り選び、α について数値的に探索したところ、最小を与える角は毎回 $\frac{1}{2}(\beta + 90^\circ)$ であり、最小値は $gd\tan\alpha$ であった。

よくある間違い

- 条件 $T > k$ を落とし、根 $k - \sqrt{k^2+1}$ を残してしまう。この根は負であり、下向きに投射することを意味してしまう。
- 両方の角が tan が一対一となる区間にある理由を述べずに、正接が等しいことから $\beta = 2\alpha - 90^\circ$ と結論してしまう。
- (ii) の角を、粒子が下降していることを述べずに $90^\circ - \alpha$ と答えてしまう。

STEP のその先へ

速さ u を固定すると、到達できる点はある放物線の内側にある。これは軌道の族の**包絡線**（envelope）、すなわち「安全放物線」（parabola of safety）である。P への最小速度の軌道は、P がその包絡線上にあるような軌道であり、(ii) の垂直性はこの曲線の幾何学的性質の一つである。曲線族の包絡線や制約条件付きの最適化（optimisation）は、大学 1 年次の講義で展開される。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、放物運動の問題がこのように丁寧に扱われる様子を見るのによい本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。