解答例

STEP I 2017、第 8 問

純粋数学 ・ 漸化式と数学的帰納法

> **STEP I 2017、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q8

鍵となる考え方

式 $a_n^2 + 2a_nb_n - b_n^2$ は漸化式（recurrence relation）を 1 ステップ適用しても変わらないので、ずっと初期値のままである。これを b_n^2 で割ると、比 c_n についての厳密な等式が得られ、そこには小さな誤差項 $1/b_n^2$ が含まれる。この等式を平方完成（completing the square）すれば、ほとんどすべてが片づく。極限（limit）も、比が $\sqrt{2}-1$ のどちら側にあるかも、$\sqrt{2}$ の有理数による評価も、そこから得られるのである。

解答

数学的帰納法

$n = 1$ のとき $a_1^2 + 2a_1b_1 - b_1^2 = 1 + 4 - 4 = 1$ であるから、$(*)$ は成り立つ。

ある $n \geq 1$ について $(*)$ が成り立つと仮定する。$a = a_n$、$b = b_n$ とおくと、

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 &= a^2 + 4ab + 4b^2, \\ 2a_{n+1}b_{n+1} &= 2(a+2b)(2a+5b) = 4a^2 + 18ab + 20b^2, \\ b_{n+1}^2 &= 4a^2 + 20ab + 25b^2. \end{aligned}$$

はじめの 2 式を加え、3 番目の式を引くと、

$$a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}b_{n+1} - b_{n+1}^2 = a^2 + 2ab - b^2 = 1.$$

よって $(*)$ は $n+1$ についても成り立ち、数学的帰納法（induction）により、すべての $n \geq 1$ について成り立つ。

小問 (i)

まず、すべての a_n と b_n は正である。実際、$n=1$ のときは正しく、漸化式は a_n と b_n から正の係数で a_{n+1} と b_{n+1} を作るからである。したがって、$a_n>0$ より

$$b_{n+1}=2a_n+5b_n>5b_n$$

である。$b_1=2=2\times 5^0$ から出発し、各ステップで少なくとも 5 倍されるので、すべての $n\geq 1$ について $b_n\geq 2\times 5^{n-1}$ が成り立つ（1 行で済む帰納法である）。

次に、$(*)$ を 0 でない b_n^2 で割ると、

$$c_n^2+2c_n-1=\frac{1}{b_n^2},\qquad \text{すなわち}\qquad (c_n+1)^2=2+\frac{1}{b_n^2}. \tag{†}$$

考えてみよう どちらの平方根をとればよいか。

$c_n>0$ であるから c_n+1 は正であり、正の平方根をとる：

$$c_n+1=\sqrt{2+\frac{1}{b_n^2}}.$$

$n\to\infty$ のとき $0<1/b_n^2\leq \frac{1}{4}25^{-(n-1)}\to 0$ であるから、$c_n+1\to\sqrt{2}$ となる（平方根関数は連続（continuous）である）。したがって、求める通り $c_n\to\sqrt{2}-1$ である。

小問 (ii)

(†) より $(c_n+1)^2=2+1/b_n^2>2$ である。$c_n+1>0$ かつ $\sqrt{2}>0$ であるから、$c_n+1>\sqrt{2}$、すなわち $c_n>\sqrt{2}-1$ が得られる。

もう一方の評価のために、$c_n+1>\sqrt{2}$ の両辺で 2 を割る。両辺は正なので、不等号の向きは逆になる：

$$\frac{2}{c_n+1}<\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

あわせて、

$$\frac{2}{c_n+1}<\sqrt{2}<c_n+1.$$

考えてみよう どの n の値で 99/70 が得られるか。

$c_n+1=(a_n+b_n)/b_n$ が 99/70 となる必要があるので、$b_n=70$ となるものを探す。漸化式を計算していくと、

$$(a_1,b_1)=(1,2),\quad (a_2,b_2)=(5,12),\quad (a_3,b_3)=(29,70).$$

よって $c_3 = \frac{29}{70}$、$c_3 + 1 = \frac{99}{70}$ であり、

$$\frac{2}{c_3 + 1} = \frac{140}{99}.$$

二重不等式に $n = 3$ を代入すると、

$$\frac{140}{99} < \sqrt{2} < \frac{99}{70}.$$

検算

- $(a_3, b_3) = (29, 70)$ は $(*)$ を満たす：$841 + 4060 - 4900 = 1$。
- $\frac{140}{99} \approx 1.414141$、$\frac{99}{70} \approx 1.414286$ であり、$\sqrt{2} \approx 1.414214$ はその間にある。区間の幅は $\frac{1}{6930}$ である。
- 次の項 $(a_4, b_4) = (169, 408)$ からは $c_4 \approx 0.4142157$ が得られ、すでに $\sqrt{2} - 1$ との差は 2.2×10^{-6} 以内である。これは誤差がおよそ $1/b_n^2$ のように減少することと合っている。
- 2 乗して確かめる：$140^2 = 19600 < 2 \times 99^2 = 19602$、$99^2 = 9801 > 2 \times 70^2 = 9800$。

よくある間違い

- $n + 1$ について $(*)$ を展開する際、項を丁寧にまとめないこと。ab と b^2 の係数はぎりぎりで打ち消し合うのである（$4 + 18 - 20 = 2$、$4 + 20 - 25 = -1$）。
- $a_n > 0$ に触れずに $b_{n+1} \geq 5b_n$ と主張すること。
- 正の平方根をとる理由を述べ忘れること、あるいは両辺が正であることを言わずに逆数をとって不等号を逆にすること。

STEP のその先へ

この漸化式は行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ を掛けることに当たる。この行列は行列式（determinant）が 1 であり、二次形式（quadratic form）$x^2 + 2xy - y^2$ を保つ。このような不変な形式を見つけることが、ペル方程式（Pell's equation）の理論の核心である。数 $c_n + 1$、すなわち $\frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{99}{70}, \ldots$ は、$\sqrt{2}$ の連分数（continued fraction）の近似分数（convergent）を 1 つおきに並べたものである。近似分数は、その分母の大きさに対して最良の有理数近似を与える。ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）は、連分数とペル方程式を見事に解説している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。