解答例

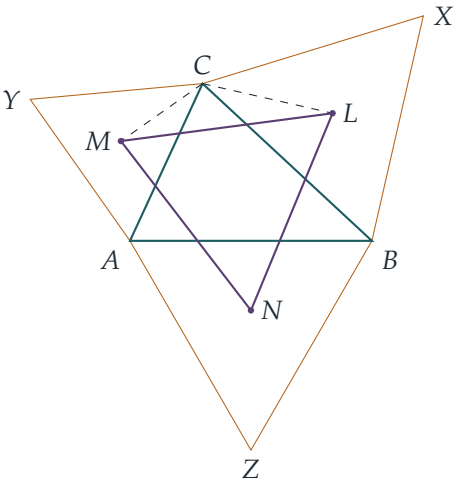
STEP I 2017、第 7 問

純粋数学 ・ ナポレオンの定理

> **STEP I 2017、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q7

鍵となる考え方

すべては ABC の頂点で起こる。正三角形（equilateral triangle）の中心（centre）は各内角の二等分線（angle bisector）上にあるので、C から L への直線と C から M への直線は、それぞれ ABC の一辺と $30°$ の角をなす。これにより、角 LCM が C を用いて表される。次に三角形 LCM において余弦定理（cosine rule）を用いると $|LM|$ が求まる。その結果は a, b, c について対称（symmetric）になり、この対称性こそが LMN を正三角形にしているのである。



解答

小問 (i)

一辺 b の正三角形 CYA において、中心 M は 3 本の中線（median）すべての上にあり、これらの中線は同時に高さの線でもあり、角の二等分線でもある。C からの中線の長さは $\frac{\sqrt{3}}{2}b$ であり、中心はその中線を頂点から 3 分の 2 進んだ位置にある。よって

$$|CM| = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2}\, b = \frac{b}{\sqrt{3}}.$$

同様に、三角形 BXC の一辺は a であるから

$$|CL| = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

小問 (ii)

CM は 60° の角 YCA を二等分するので、直線 CM は CA と 30° の角をなし、B と反対の側にある。同様に、CL は CB と 30° の角をなし、A と反対の側にある。C のまわりを L から M まで回ると、まず 30°、次に三角形の角 C、さらにもう一度 30° を通過する。よって

$$\angle LCM = C + 60^\circ.$$

考えてみよう $C > 120^\circ$ で、$C + 60^\circ$ が 180° を超える場合はどうなるか？

その場合、三角形 LCM の C における角は反対側の角 $360^\circ - (C + 60^\circ)$ となる。しかし $\cos(360^\circ - \theta) = \cos\theta$ であるから、以下の余弦定理はどの場合にも同じ結果を与える。

小問 (i) の長さを用いて、三角形 LCM に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} |LM|^2 &= \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{3} - \frac{2ab}{3}\cos(C + 60^\circ) \\ &= \frac{a^2 + b^2}{3} - \frac{2ab}{3}\left(\tfrac{1}{2}\cos C - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin C\right) \\ &= \frac{a^2 + b^2}{3} - \frac{ab\cos C}{3} + \frac{\sqrt{3}\,ab\sin C}{3}. \end{aligned}$$

ここで三角形 ABC に関する 2 つの事実を用いる。余弦定理より $2ab\cos C = a^2 + b^2 - c^2$ であり、面積は $\Delta = \frac{1}{2}ab\sin C$ であるから $ab\sin C = 2\Delta$ である。両辺に 6 を掛けると

$$\begin{aligned} 6|LM|^2 &= 2(a^2 + b^2) - 2ab\cos C + 2\sqrt{3}\,ab\sin C \\ &= 2a^2 + 2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2) + 4\sqrt{3}\,\Delta \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}\,\Delta, \end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。

右辺は a, b, c を入れ替えても変わらず、Δ も三角形の頂点の名前の付け方によらない。同じ議論を頂点 A で（$|MN|$ について）、頂点 B で（$|NL|$ について）繰り返すと、同じ式が得られる。よって

$$|LM| = |MN| = |NL|,$$

であり、LMN は正三角形である。

面積が等しい条件。一辺 s の正三角形の面積は $\frac{\sqrt{3}}{4}s^2$ である。$S = a^2 + b^2 + c^2$ とおく。すると

$$[LMN] = \frac{\sqrt{3}}{4}|LM|^2 = \frac{\sqrt{3}}{24}(S + 4\sqrt{3}\,\Delta) = \frac{\sqrt{3}}{24}S + \frac{\Delta}{2}.$$

したがって

$$[LMN] = \Delta \iff \frac{\sqrt{3}}{24}S = \frac{\Delta}{2} \iff S = \frac{12\Delta}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}\,\Delta.$$

どの段階も逆にたどれるので、これで求める「必要十分条件」が示された。

小問 (iii)

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ と $\Delta = \frac{1}{2}ab\sin C$ を用いて、すべてを a, b, C で表す。以下の各行は直前の行と同値である。

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 + c^2 = 4\sqrt{3}\,\Delta \\ \iff \quad & 2a^2 + 2b^2 - 2ab\cos C = 2\sqrt{3}\,ab\sin C \\ \iff \quad & a^2 + b^2 = ab(\cos C + \sqrt{3}\sin C) \\ \iff \quad & a^2 + b^2 = 2ab\cos(C - 60^\circ), \end{aligned}$$

ここで $\cos C + \sqrt{3}\sin C = 2(\cos C\cos 60^\circ + \sin C\sin 60^\circ) = 2\cos(C - 60^\circ)$ を用いた。両辺から $2ab$ を引くと

$$a^2 - 2ab + b^2 = 2ab\cos(C - 60^\circ) - 2ab \iff (a-b)^2 = -2ab(1 - \cos(C - 60^\circ)).$$

よって 2 つの条件は同値である。

> **考えてみよう** 平方が、前にマイナス符号のついた量と等しくなるのはどのようなときか？

両辺がともに 0 のときに限る。左辺 $(a-b)^2$ は 0 以上である。右辺では $ab > 0$ かつ $1 - \cos(C - 60^\circ) \geq 0$ であるから、右辺は 0 以下である。したがって等号が成り立つのは、ちょうど

$$a = b \quad \text{かつ} \quad \cos(C - 60^\circ) = 1.$$

のときである。$0^\circ < C < 180^\circ$ より $-60^\circ < C - 60^\circ < 120^\circ$ であり、この範囲で余弦が 1 となる角は 0° だけである。よって $C = 60^\circ$ である。$a = b$ で頂角が 60° の三角形

では、残りの 2 つの角は等しく、その和は 120° であるから、3 つの角はすべて 60° となり、三角形は正三角形である。逆に、正三角形は $a = b$ かつ $C = 60^\circ$ を満たすので、条件を満たす。

これを小問 (ii) と合わせると、$[LMN] = [ABC] \iff a^2 + b^2 + c^2 = 4\sqrt{3}\,\Delta \iff ABC$ は正三角形、となる。

検算

- 一辺 1 の正三角形 ABC の場合：$\Delta = \frac{\sqrt{3}}{4}$ であり、$6|LM|^2 = 3 + 3 = 6$ より $|LM| = 1$ となって、小問 (iii) の予測どおり面積は等しい。
- 辺が 3–4–5 の直角三角形の場合：$S = 50$, $\Delta = 6$ であるから $|LM|^2 = (50 + 24\sqrt{3})/6 \approx 15.26$ である。すると $[LMN] \approx 6.61$ となり、$[ABC] = 6$ より大きい。点 L, M, N の座標を用いたコンピュータによる検算でも同じ値が得られ、鈍角三角形を含む数千個のランダムな三角形で $6|LM|^2$ の公式が確かめられた。
- 小問 (iii) からは、任意の三角形について $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\,\Delta$ であること、したがって常に $[LMN] \geq [ABC]$ であることもわかる。

よくある間違い

- $|CM|$ を 3 分の 2 ではなく、中線全体 $\frac{\sqrt{3}}{2}b$ やその 3 分の 1 としてしまう。
- 両側の 30° を忘れて、$\angle LCM = C + 30^\circ$ や C としてしまう。
- 小問 (iii) で「$a = b$」で止まってしまう。$C = 60^\circ$ も必要であり、余弦が 1 となる他の角を除外するために C の範囲も必要である。

STEP のその先へ

これはナポレオン（Napoleon）の定理（Napoleon's theorem）である。すなわち、任意の三角形の各辺の外側に正三角形を作ると、それらの中心は正三角形をなす。小問 (iii) で得られた不等式 $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\,\Delta$ は Weitzenböck の不等式（Weitzenböck's inequality）である。複素数（complex numbers）を用いると、ナポレオンの定理を非常に鮮やかに証明できる。60° の回転は $e^{i\pi/3}$ を掛けることにほかならない。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析の入門書）は、このような幾何学の扱い方を見事に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。