解答例

STEP I 2017、第 6 問

純粋数学 ・ 積分と符号の変化

> **STEP I 2017、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q6

鍵となる考え方

符号を変えず、かつ恒等的に 0 ではない（not identically zero）連続関数（continuous function）の積分は 0 にならない。そのような関数はある小さな区間上で 0 から離れた値をとり続け、その区間だけで積分にある正の寄与が生じるからである。小問 (i) はこのことを厳密に述べるものであり、小問 (ii) と (iii) は巧みに選んだ関数にそれを適用する。(ii) では被積分関数（integrand）$(x-\alpha)^2 g(x)$ は g と同じ符号をもつ。(iii) では部分積分（integration by parts）によって、h についての条件が h' に対する (ii) の条件に書き換えられる。

解答

小問 (i)

背理法（proof by contradiction）で示す。f が $[0,1]$ 上で正の値と負の値の両方をとることはないと仮定する。すると、$[0,1]$ のすべての x に対して $f(x) \geq 0$ であるか、またはそのようなすべての x に対して $f(x) \leq 0$ である。必要ならば f を $-f$ に置き換えることにより（これによって仮定 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ も結論も変わらない）、区間全体で $f(x) \geq 0$ と仮定してよい。

ある $c \in [0,1]$ に対して $f(c) \neq 0$ であるから、$f(c) > 0$ である。f は c で連続であるから、ある $\delta > 0$ が存在して、$|x-c| < \delta$ を満たす $[0,1]$ のすべての x に対して $f(x) > \frac{1}{2} f(c)$ となる。この集合は、正の長さ $q-p$ をもつ区間 $[p,q] \subseteq [0,1]$ を含む（$0 < \eta < \delta$ かつ $\eta \leq \frac{1}{2}$ として、$c \leq \frac{1}{2}$ ならば $[c, c+\eta]$、$c > \frac{1}{2}$ ならば $[c-\eta, c]$ をとれ

ばよい)。至るところで $f \geq 0$ であるから、

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \;\geq\; \int_p^q f(x)\,\mathrm{d}x \;\geq\; \tfrac{1}{2}f(c)\,(q-p) \;>\; 0,$$

となり、これは $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ に矛盾する。よって、f は $[0,1]$ 上で正の値と負の値の両方をとる。

考えてみよう 「$f \geq 0$ かつ $f(c) > 0$ だから積分は正である」というだけでは、なぜ不十分なのだろうか。

関数がただ一点で正であっても、積分はそれを感知しない。一点には幅がないからである。c における正の値を正の長さをもつ区間へと広げるのは連続性であり、それこそが積分を正にするのである。

小問 (ii)

平方を展開し、3 つの条件 $(*)$ を用いると、

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x-\alpha)^2 g(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x^2 g(x)\,\mathrm{d}x - 2\alpha\int_0^1 x g(x)\,\mathrm{d}x + \alpha^2\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \alpha^2 - 2\alpha\cdot\alpha + \alpha^2\cdot 1 = 0.\end{aligned}$$

次に、背理法により、すべての $x \in [0,1]$ に対して $g(x) \neq 0$ であると仮定する。すると g は $[0,1]$ 上で両方の符号をとることはできない（もしとるならば、問題冒頭の仮定により、どこかで 0 になってしまう)。したがって g は区間全体で狭義に正であるか、区間全体で狭義に負である。

$f(x) = (x-\alpha)^2 g(x)$ とおくと、これは連続である。$(x-\alpha)^2 \geq 0$ であるから、f は 0 でないところでは g と同じ符号をもち、したがって f は両方の符号をとらない。しかし f は $[0,1]$ のどこかで 0 でない。実際、$(x-\alpha)^2$ が 0 になるのは $x = \alpha$ のときに限るから、(場合によっては) α を除くすべての $x \in [0,1]$ に対して $f(x) \neq 0$ である。そして $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ である。小問 (i) により f は両方の符号をとらなければならず、これは矛盾である。よって、$[0,1]$ のある x に対して $g(x) = 0$ となる。

1 次関数の例。 $g(x) = a + bx$ とすると、条件 $(*)$ は

$$a + \tfrac{1}{2}b = 1, \qquad \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{3}b = \alpha, \qquad \tfrac{1}{3}a + \tfrac{1}{4}b = \alpha^2.$$

となる。第 1 式より $a = 1 - \frac{1}{2}b$ であり、これを第 2 式に代入すると $\frac{1}{2} + \frac{1}{12}b = \alpha$ を得るから、

$$b = 12\alpha - 6, \qquad a = 4 - 6\alpha.$$

このとき第 3 の条件は

$$\tfrac{1}{3}(4-6\alpha)+\tfrac{1}{4}(12\alpha-6)=\alpha-\tfrac{1}{6}=\alpha^2,$$

すなわち $6\alpha^2-6\alpha+1=0$ となるので、

$$\alpha=\frac{3\pm\sqrt{3}}{6}.$$

α は自由に選べないことに注意しよう。1 次関数 g が条件を満たすのは、この 2 つの値に限られる。$\alpha=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ とすると $b=2\sqrt{3}$、$a=1-\sqrt{3}$ となるので、

$$g(x)=1-\sqrt{3}+2\sqrt{3}\,x,$$

であり、これは

$$x=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{6}\approx 0.211,$$

で 0 になる。この値は小問 (ii) の主張どおり $[0,1]$ に含まれる。（もう一方の選び方 $\alpha=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$ では $g(x)=1+\sqrt{3}-2\sqrt{3}\,x$ となり、これは $x=\frac{3+\sqrt{3}}{6}\approx 0.789$ で 0 になる。この値もやはり $[0,1]$ に含まれる。）

小問 (iii)

$g=h'$ が $\alpha=1-\beta$ として $(*)$ を満たすことを示す。ここで h' は、小問 (ii) が要求するとおり連続である。まず、

$$\int_0^1 h'(x)\,\mathrm{d}x=h(1)-h(0)=1.$$

$u=x$、$\mathrm{d}v=h'(x)\,\mathrm{d}x$ として部分積分すると、

$$\int_0^1 xh'(x)\,\mathrm{d}x=\Big[xh(x)\Big]_0^1-\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x=1-\beta.$$

今度は $u=x^2$ として再び部分積分すると、

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2h'(x)\,\mathrm{d}x&=\Big[x^2h(x)\Big]_0^1-2\int_0^1 xh(x)\,\mathrm{d}x\\&=1-\beta(2-\beta)=1-2\beta+\beta^2=(1-\beta)^2.\end{aligned}$$

考えてみよう $\frac{1}{2}\beta(2-\beta)$ という奇妙な値はどこから来たのだろうか。

この値は、3 番目の積分がちょうど 2 番目の積分の平方になるように選ばれている。2 回の部分積分の後、2 番目の積分は $1-\beta$ であるから、3 番目の積分は $(1-\beta)^2$ でなければならない。それをまさに実現するのが $\frac{1}{2}\beta(2-\beta)$ なのである。

したがって h' は連続であり、$\alpha=1-\beta$ として $(*)$ を満たす。小問 (ii) により、$[0,1]$ のある x に対して $h'(x)=0$ となる。

検算

- $g(x) = 1 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3}\,x$ について直接積分すると、$\int_0^1 g = 1$、$\int_0^1 xg = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \approx 0.7887$、$\int_0^1 x^2 g \approx 0.6220 = (0.7887)^2$ を得る。
- 小問 (iii) は、導関数が上の g である $h(x) = (1-\sqrt{3})x + \sqrt{3}\,x^2$ で確かめることができる。このとき $h(0) = 0$、$h(1) = 1$、$\beta = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \approx 0.2113$ であり、$\int_0^1 xh = \frac{1}{2}\beta(2-\beta) \approx 0.1890$ となる。その導関数は $x \approx 0.211$ で 0 になるので、予想どおり h は $[0,1]$ の内部に極値をとる点（turning point）をもつ。

よくある間違い

- (i) で、連続性を用いずに「$f \geq 0$ だから $\int f > 0$」と論じてしまう。非負の関数は、至るところで 0 でなくても積分が 0 になりうる（ただ一点でのみ 0 でない場合など）。したがって連続性は欠かせない。
- (ii) で、(i) を g そのものに適用してしまう。$\int g$ については 1 であること以外何もわかっていない。(i) は $(x-\alpha)^2 g$ に適用しなければならず、しかもこの関数がどこかで 0 でないことを確かめる必要がある。
- (iii) で、(ii) を適用するには h' が連続でなければならないことを忘れてしまう。問題文で h が**連続な**導関数をもつとされているのはそのためである。

STEP のその先へ

条件 $(*)$ は、もし g が確率密度（probability density）であったならば、その平均（mean）は α、分散（variance）は $\int (x-\alpha)^2 g = 0$ であることを意味している。分散が 0 となる本物の確率密度は存在しえない。g がどこかで 0 を下回らなければならないのはそのためである。小問 (i) は実解析（real analysis）の標準的な補題（lemma）であり、「連続で非負の関数の積分が 0 ならば、その関数は恒等的に 0 である」というものである。これは、たとえば変分法（calculus of variations）などで絶えず用いられる。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）は、連続性とリーマン積分（Riemann integral）を丁寧に展開しており、この補題や、本問で仮定してよいとされている中間値の定理（intermediate value theorem）を証明できるところまで扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。