解答例

STEP I 2017、第 5 問

純粋数学 ・ 微分による最適化

STEP I 2017、問 5

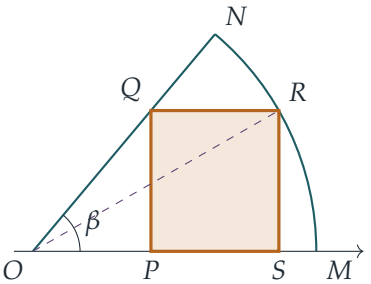
先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/17-s1-q5

鍵となる考え方

頂点の配置を決めてしまえば、すべては一つの変数 x で定まる。Q は直線 $y = x\tan\beta$ 上で P の真上にあり、R は Q と同じ高さで円周上にある。三平方の定理（Pythagoras' theorem）により s が x で表され、面積は微分すればよいだけの普通の一変数関数になる。最後の角に関する条件は、tan の半角の公式（half-angle formula）から自然に導かれる。

解答



面積

$PQRS$ は P と S が x 軸上にある長方形（rectangle）であるから、辺 PQ と SR は鉛直である。よって Q の x 座標は x である。Q は ON、すなわち直線 $y = x\tan\beta$ 上にあるので $Q = (x,\, x\tan\beta)$ であり、$R = (s,\, x\tan\beta)$ となる。長方形の横幅は $PS = s - x$（S

は P より O から遠いので正)、高さは $PQ = x\tan\beta$ であるから、

$$A = x(s-x)\tan\beta,$$

となり、示すべき式が得られた。

s と $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}$ を求める

R は円周上にあるので $OR = a$、したがって $s^2 + x^2\tan^2\beta = a^2$ である。$s > 0$ より

$$s = \sqrt{a^2 - x^2\tan^2\beta}.$$

$s^2 = a^2 - x^2\tan^2\beta$ を陰関数微分（implicit differentiation）すると $2s\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = -2x\tan^2\beta$ となるので、$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{x\tan^2\beta}{s}$ である。ここで $A = (xs - x^2)\tan\beta$ と書き、xs に積の微分法（product rule）を用いると

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} &= \left(s + x\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} - 2x\right)\tan\beta \\ &= (s-2x)\tan\beta - \frac{x^2}{s}\tan^3\beta,\end{aligned}$$

となり、これが求める結果である。

面積の最大値

まず x の範囲を調べる。x が 0 から増加すると、Q は ON 上を上へ動き、R は弧に沿って N に向かって動く。R が N に達すると長方形は鉛直な線分につぶれ、それは $x = a\cos\beta$ のときである（このとき $s = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\beta} = a\cos\beta = x$）。よって $0 < x < a\cos\beta$ であり、A は $[0, a\cos\beta]$ 上の連続関数（continuous function）で、両端で $A = 0$、その間では $A > 0$ である。したがって最大値は区間の内部の停留点（stationary point）でとられる。

$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = 0$ とおき、$\tan\beta > 0$ で割って $s > 0$ を掛けると

$$\begin{aligned}s^2 - 2xs &= x^2\tan^2\beta \\ s^2 - 2xs + x^2 &= x^2(1+\tan^2\beta) = x^2\sec^2\beta \\ (s-x)^2 &= x^2\sec^2\beta.\end{aligned}$$

? **考えてみよう** どちらの平方根をとるべきか。また、これが最大であることはどうしてわかるか。

$s - x$ と $x\sec\beta$ はどちらも正である（$0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ より）から、$s - x = x\sec\beta$ である。もう一方の根では $s - x$ が負になってしまう。よって $0 < x < a\cos\beta$ における停留点

はちょうど一つで、

$$s = x(1+\sec\beta),$$

で与えられ、前の段落の議論により、これが面積の最大値を与える。

その面積を求めるため、$s^2 + x^2\tan^2\beta = a^2$ に代入する。$\tan^2\beta = \sec^2\beta - 1$ を用いると

$$(1+\sec\beta)^2 + \tan^2\beta = 2\sec\beta + 2\sec^2\beta = 2\sec\beta\,(1+\sec\beta),$$

であるから

$$x^2 = \frac{a^2}{2\sec\beta\,(1+\sec\beta)} = \frac{a^2\cos^2\beta}{2(1+\cos\beta)}.$$

このとき $s - x = x\sec\beta$ であるから

$$A = x\cdot x\sec\beta\cdot\tan\beta = x^2\,\frac{\sin\beta}{\cos^2\beta} = \frac{a^2\sin\beta}{2(1+\cos\beta)}$$
$$= \frac{a^2\cdot 2\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\beta}{2\cdot 2\cos^2\frac{1}{2}\beta} = \tfrac{1}{2}a^2\tan\tfrac{1}{2}\beta,$$

となる。ここで $\sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\beta$ と $1+\cos\beta = 2\cos^2\frac{1}{2}\beta$ を用いた。

角 ROS

直角三角形 ORS において $\tan\angle ROS = \dfrac{SR}{OS} = \dfrac{x\tan\beta}{s}$ である。最大となるとき、同じ二つの半角の恒等式により

$$\tan\angle ROS = \frac{\tan\beta}{1+\sec\beta} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta+1} = \tan\tfrac{1}{2}\beta,$$

となる。$\angle ROS$ と $\frac{1}{2}\beta$ はどちらも $(0, \frac{\pi}{2})$ に属し、そこで tan は単射（one-to-one）であるから、$\angle ROS = \frac{1}{2}\beta$ である。つまり、最適な長方形では OR が扇形（sector）を二等分する。

検算

- $a = 1$、$\beta = \frac{\pi}{3}$ とする。このとき $x^2 = \frac{1/4}{3} = \frac{1}{12}$、$s = 3x$ であり、$A = x\cdot 2x\cdot\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{6} \approx 0.2887$ となって、これは $\frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{6}$ に等しい。多数のランダムな a と β について、x の細かい格子上でコンピュータ探索を行ったところ、同じ最大値と同じ最適な x が得られた。
- $\beta \to 0$ のとき扇形はつぶれ、$\frac{1}{2}a^2\tan\frac{1}{2}\beta \to 0$ となり、当然そうあるべき結果である。
- 次元：A は a^2 に無次元の数を掛けたものなので、確かに面積である。

よくある間違い

- s が x に依存することを忘れ、s を定数であるかのように扱って $x(s-x)\tan\beta$ を微分してしまう。
- $s - x = -x\sec\beta$ も解として採用してしまう、あるいは停留点が最大であることの根拠を示さない。

STEP のその先へ

OR が扇形の二等分線（bisector）に沿うというすっきりした答えには、明快な説明がある。$R = (a\cos\theta, a\sin\theta)$ とおくと、短い計算で $A = \frac{1}{2}a^2\big(\cos(2\theta-\beta) - \cos\beta\big)/\sin\beta$ が得られ、これは明らかに $\theta = \frac{1}{2}\beta$ のとき最大になる。変数をうまく選べば、最適化はほとんど自明になりうるのである。大学では多変数の条件付き最適化（constrained optimisation）を学ぶ。そこでは s を消去する代わりに、ラグランジュの未定乗数法（Lagrange multipliers）を用いて、$s^2 + x^2\tan^2\beta = a^2$ という条件のもとで $x(s-x)$ を最大化することもできる。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、この種の問題がさらに多く収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。