解答例

STEP I 2017、第 4 問

純粋数学 • 2 次式と等比級数

> **STEP I 2017、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q4

鍵となる考え方

すべては、開区間（open interval）$(-1,1)$ に属する r の値のうち、ある特定の p（または q）の値を与えるものがいくつあるかにかかっている。これは $-1<r<1$ に制限した放物線（parabola）についての問題である。水平な直線はこの放物線と一度交わるか、二度交わるか、まったく交わらないかのいずれかであり、どれになるかはグラフを描けばわかる。r がわかれば和は定まる。さらに、和は r の単射（one-to-one）な関数なので、r の異なる二つの値は必ず異なる二つの和を与える。和が満たす方程式を求めるには、r を和で表して代入すればよい。

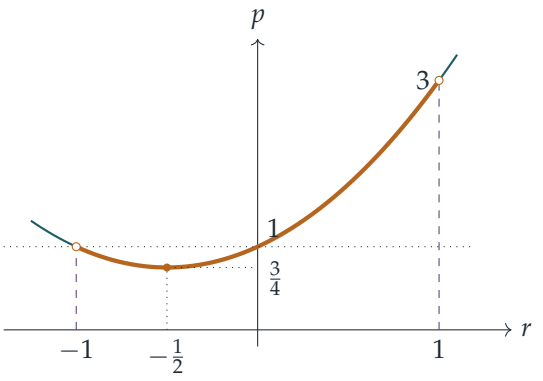
解答

小問 (i)

平方完成（completing the square）すると、

$$1+r+r^2=\left(r+\tfrac{1}{2}\right)^2+\tfrac{3}{4},$$

となるので、グラフは $\left(-\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{4}\right)$ を最小点とする放物線である。このグラフは $(-1,1)$、$(0,1)$、$(1,3)$ を通る。



$-1 < r < 1$（太い弧）において、この関数は 1（$r = -1$ は除かれるので、この値はとらない）から減少して $r = -\frac{1}{2}$ で最小値 $\frac{3}{4}$ をとり、その後 3 に向かって増加する（ここでも $r = 1$ は除かれるので、この値はとらない）。したがって

$$\frac{3}{4} \leq p < 3.$$

$1 < p < 3$ のとき。この p を与える r の値は、次の方程式の解である。

$$r^2 + r + (1 - p) = 0.$$

2 解の積は $1 - p < 0$ なので、正の解と負の解が一つずつある。2 解の和は -1 なので、負の解は -1 から正の解を引いたものに等しく、これは -1 より小さいから許されない。正の解は

$$r = \frac{-1 + \sqrt{4p - 3}}{2},$$

であり、$1 < 4p - 3 < 9$ より $0 < r < 1$ となるので、これは許される。（グラフでいえば、高さ $p \in (1,3)$ の直線は、太い弧と増加部分 $0 < r < 1$ でのみ交わる。）よって p は r を一意に定め、したがって $S = 1/(1 - r)$ も一意に定まる。

$\frac{3}{4} < p < 1$ のとき。このとき判別式（discriminant）$1 - 4(1 - p) = 4p - 3$ は正なので、この 2 次方程式は異なる二つの実数解をもつ。2 解の積 $1 - p$ は正で、和は -1 なので、どちらも負である。各解は -1 から他方の解を引いたものに等しく、他方は負なので、各解は -1 より大きい。したがって、2 解はともに $(-1,0)$ に属し、どちらも許される。

考えてみよう r の値が二つあるのはよい。しかし、それらはなぜ**異なる** S の値を与えなければならないのだろうか？

$S = \dfrac{1}{1 - r}$ は逆に解くことができ、$r = 1 - \dfrac{1}{S}$ となるからである。したがって、異なる r の値は異なる S の値を与え、S のとりうる値はちょうど二つである。

これらが満たす方程式を求めるため、$u = 1/S$ として $r = 1 - u$ を $r^2 + r + 1 - p = 0$ に代入する。

$$(1-u)^2 + (1-u) + 1 - p = 0$$
$$u^2 - 3u + (3-p) = 0.$$

$u = 1/S$ とおき、S^2（これは零でない）を掛けると

$$(3-p)S^2 - 3S + 1 = 0,$$

となり、題意が示された。S の二つの値はどちらも許される解 r から得られるので、ともにこの方程式を満たす。

小問 (ii)

再び平方完成すると、

$$q = 1 + 2r + 3r^2 = 3\left(r + \tfrac{1}{3}\right)^2 + \tfrac{2}{3}.$$

最小値は $r = -\frac{1}{3}$ における $\frac{2}{3}$ であり、$r = -1$ での値は 2、$r = 1$ での値は 6 である。よって $-1 < r < 1$ において、

- 減少部分 $-1 < r \leq -\frac{1}{3}$ では、q は $\left[\frac{2}{3}, 2\right)$ の各値をちょうど一度ずつとる。
- 増加部分 $-\frac{1}{3} \leq r < 1$ では、q は $\left[\frac{2}{3}, 6\right)$ の各値をちょうど一度ずつとる。

二つの部分が共有するのは点 $r = -\frac{1}{3}$ のみである。したがって、q の値は次のようになる。

- $q = \frac{2}{3}$ のとき（すなわち $r = -\frac{1}{3}$）、または $2 \leq q < 6$ のとき（増加部分のみ）は、ちょうど一つの r から得られる。
- $\frac{2}{3} < q < 2$ のときは、ちょうど二つの r の値から得られる（各部分に一つずつ）。
- それ以外のときは、どの r からも得られない。

たとえば $q = 2$ のとき、方程式 $3r^2 + 2r - 1 = 0$ は $(3r-1)(r+1) = 0$ と因数分解され、解 $r = -1$ は除かれるので、$r = \frac{1}{3}$ だけが残る。

先ほどと同様に、T は r を定める。$1 - r > 0$ なので $1 - r = 1/\sqrt{T}$ である。よって異なる r は異なる T を与える。したがって

$$T \text{ は次のとき一意に定まる：} q = \tfrac{2}{3} \text{ または} 2 \leq q < 6,$$

であり、

$$T \text{ は次のとき二つの値をとりうる：} \tfrac{2}{3} < q < 2.$$

2 次方程式。$u = 1 - r = 1/\sqrt{T} > 0$ として、$r = 1 - u$ と書く。すると

$$q = 1 + 2(1-u) + 3(1-u)^2 = 3u^2 - 8u + 6.$$

$u^2 = 1/T$ なので、これは $\dfrac{3}{T} + 6 - q = \dfrac{8}{\sqrt{T}}$ と書ける。両辺に T を掛けると、

$$(6-q)T + 3 = 8\sqrt{T}.$$

これはすでに $\sqrt{T}$ についての 2 次方程式である。T 自身についての 2 次方程式を得るため、両辺を 2 乗する。

$$(6-q)^2T^2 + 6(6-q)T + 9 = 64T,$$

すなわち

$$(6-q)^2\,T^2 - 2(3q+14)\,T + 9 = 0.$$

T のとりうる二つの値はどちらもこれを満たす。ここでは 2 乗によって余分な解が入り込むことはない。$q < 6$ かつ $T > 0$ のとき左辺 $(6-q)T + 3$ は正なので、もう一方の可能性 $(6-q)T + 3 = -8\sqrt{T}$ は $T > 0$ となる解をもたない。また、T についての 2 次方程式は 2 解の積 $9/(6-q)^2$ も和も正なので、2 解はともに正である。よって、その 2 解はちょうど T の二つの値である。

検算

- $p = \frac{7}{8}$ とする。このとき $r^2 + r + \frac{1}{8} = 0$ より $r = \frac{-2\pm\sqrt{2}}{4}$ であり、どちらも $(-1, 0)$ に属する。対応する和 $S \approx 0.873$ と $S \approx 0.540$ は $\frac{17}{8}S^2 - 3S + 1 = 0$ を満たし、この方程式の 2 解の和は $\frac{24}{17} \approx 1.412$、積は $\frac{8}{17}$ である。
- $q = 1$ とする。このとき $3r^2 + 2r = 0$ より $r = 0$ または $r = -\frac{2}{3}$ なので、$T = 1$ または $T = \frac{9}{25}$ である。2 次方程式は $25T^2 - 34T + 9 = (T-1)(25T-9)$ となり、期待どおりである。
- 境界 $q = \frac{2}{3}$ では、2 次方程式は $\frac{256}{9}T^2 - 32T + 9 = 0$ となり、判別式は $1024 - 1024 = 0$ である。これは重解 $T = \frac{9}{16} = 1/(1+\frac{1}{3})^2$ をもち、ただ一つの値 $r = -\frac{1}{3}$ に対応している。
- 各範囲から p と q のランダムな値を数千個とり、コンピュータで確認した。解の個数も、二つの 2 次方程式も一致する。

よくある間違い

- $r = \pm 1$ が除かれることを忘れる。そうすると、誤って $p = 1$ を「二つの値」の場合に入れたり、$q = 2$ を「一意」の集合から外したりしてしまう。

- 孤立した値 $q = \frac{2}{3}$（頂点）を見落とす。ここでも T は一意である。
- 余分な解が入り込んでいないかを確かめずに 2 乗する。

STEP のその先へ

この問題の本質は、関数がどのようなときに逆関数をもつか（invertible）という点にある。写像 $r \mapsto p$ は定義域の一部では単射、残りの部分では 2 対 1 であり、答えは式だけでなく定義域にも依存する。級数 $\sum r^n$ と $\sum nr^{n-1}$ は、べき級数（power series）と、それを項別微分（term-by-term differentiation）したものである。収束半径（radius of convergence）の内側で項別微分が許される理由は、大学 1 年で学ぶ解析学の標準的な結果である。Abbott の *Understanding Analysis* は、べき級数と一様収束（uniform convergence）を丁寧かつ読みやすく扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。