解答例

STEP I 2017、第 3 問

純粋数学 • 放物線の接線

> **STEP I 2017、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q3

鍵となる考え方

ここに現れる量はすべて媒介変数（parameter）p と q で表せる。そこで、R、S、T の座標を求め、二つの面積を直接計算する方針をとる。三角形 RST は辺 ST が y 軸上にあるので特に扱いやすい。高さは単に R からこの軸までの距離である。三角形 OPQ は頂点の一つが原点にあるので、公式 $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$ を使えば一行で済む。

解答

P における接線

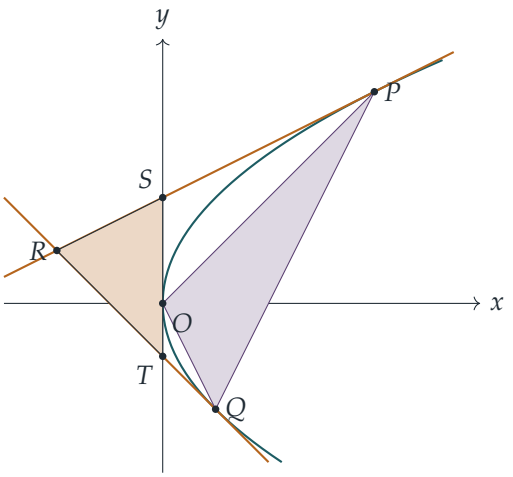
$y^2 = 4ax$ を陰関数微分（implicit differentiation）すると $2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4a$ となるので、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2a}{y}$ である。P では $y = 2ap \neq 0$（$a, p > 0$ より）であるから、傾き（gradient）は

$$\frac{2a}{2ap} = \frac{1}{p}.$$

したがって、$P(ap^2, 2ap)$ を通る接線（tangent）は

$$y - 2ap = \frac{1}{p}\left(x - ap^2\right) \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{1}{p}x - ap + 2ap = \frac{1}{p}x + ap,$$

となり、示すべき式が得られた。同様に、Q は p を q に置き換えた同じ形をしている（かつ $q \neq 0$）ので、Q における接線は $y = \dfrac{1}{q}x + aq$ である。



図は $a=1$、$p=2$、$q=-1$ の場合である。R は y 軸の左側にあり、高さは S と T の間にある。

点 R、S、T

それぞれの接線の式に $x=0$ を代入すると

$$S=(0,\,ap),\qquad T=(0,\,aq).$$

R では二本の接線が交わるので

$$\frac{x}{p}+ap=\frac{x}{q}+aq \quad\Longrightarrow\quad x\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)=a(q-p) \quad\Longrightarrow\quad x\cdot\frac{q-p}{pq}=a(q-p).$$

$p>0>q$ より $q-p\neq 0$ であるから、これで割ってよい（これは、二本の接線が平行でなく R が存在する理由でもある）。よって $x=apq$ であり、このとき $y=\dfrac{apq}{p}+ap=a(p+q)$ となる。

$$R=(apq,\,a(p+q)).$$

考えてみよう R は y 軸のどちら側にあるか。また、それが面積にとってなぜ重要なのか。

$p>0$ かつ $q<0$ であるから積 pq は負であり、R の x 座標 apq は負である。すなわち R は軸の左側にあり、軸からの距離は $a|pq|=-apq$ である。面積は正でなければならないので、apq をそのまま「高さ」と書かずに、符号に注意を払う。

三角形 RST の面積

ST を底辺とする。これは y 軸上にあり、長さは $ap - aq = a(p-q)$ で、$p > q$ より正である。R から y 軸に下ろした垂線の長さ、すなわち高さは $-apq$ である。よって

$$[RST] = \tfrac{1}{2} \cdot a(p-q) \cdot (-apq) = -\tfrac{1}{2}a^2pq(p-q).$$

三角形 OPQ の面積

頂点が O、(x_1, y_1)、(x_2, y_2) である三角形の面積は $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$ である。$P(ap^2, 2ap)$、$Q(aq^2, 2aq)$ とすると

$$x_1y_2 - x_2y_1 = ap^2 \cdot 2aq - aq^2 \cdot 2ap = 2a^2pq(p-q).$$

ここで $a^2 > 0$、$pq < 0$、$p - q > 0$ であるから、これは負であり、

$$[OPQ] = \tfrac{1}{2} \cdot (-2a^2pq(p-q)) = -a^2pq(p-q).$$

結論

二つの結果を比べると

$$[OPQ] = -a^2pq(p-q) = 2\left(-\tfrac{1}{2}a^2pq(p-q)\right) = 2\,[RST],$$

となるので、三角形 OPQ の面積は三角形 RST の面積の 2 倍であり、示すべきことが示された。

検算

図の場合 $a = 1$、$p = 2$、$q = -1$ では、$P(4,4)$、$Q(1,-2)$、$R(-2,1)$、$S(0,2)$、$T(0,-1)$ となる。このとき $[RST] = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$、$[OPQ] = \frac{1}{2}|4 \cdot (-2) - 1 \cdot 4| = 6$ であり、確かに 2 倍である。R が両方の接線の式を満たすことも確かめられる。実際、$1 = \frac{-2}{2} + 2$ かつ $1 = \frac{-2}{-1} - 1$ である。さらに、この等式は a、p、q を無作為に選んだ 2000 通りの場合について、コンピュータによる厳密な計算でも確認した。

よくある間違い

- 三角形 RST の高さを apq と書いてしまう。R は y 軸に関して曲線と反対側にあるので、これは負である。
- $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$ の絶対値を落とし、OPQ の面積が負になってしまう。
- $q - p$ が 0 でない理由を述べずに、$q - p$ で割ってしまう。

STEP のその先へ

媒介変数表示（parametrisation）$(at^2, 2at)$ により、放物線（parabola）上の各点は一つの数 t に対応する。そして $t = p$ と $t = q$ における接線は常に $(apq, a(p+q))$、つまり媒介変数の「積」と「和」で表される点で交わる。このような結果は、ここで見た 2 : 1 の面積比とともに、円錐曲線（conic）の古典的な射影幾何学（projective geometry）の一部である。そこでは接線や弦（chord）が媒介変数と行列式（determinant）を用いて研究される。三角形の面積を表す行列式の公式は、面積を符号付きの線形な量としてとらえる出発点であり、この考え方は Strang, *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）で展開されている。また Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）には、媒介変数表示された曲線に関する STEP 形式の演習がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。