解答例

STEP I 2017、第 2 問

純粋数学 • 不等式の積分

> **STEP I 2017、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q2

鍵となる考え方

積分（integration）は不等式（inequality）を保つ。すなわち、$a < b$ である区間 $[a, b]$ 上で $f(t) \leq g(t)$ ならば、$\int_a^b f \leq \int_a^b g$ である。注意すべきは積分の向きだけである。$x < 1$ のとき区間 $[1, x]$ は逆向きになり、不等式の向きが反転するからである。最後の小問でも同じ考え方を再び用いる。非負の関数を 1 から y まで積分すると $y - 1$ と同じ符号をもつ値が得られ、まさにその符号こそが、安全に両辺を割るために必要なものである。

解答

小問 (i)

$x \geq 1$ の場合。 $1 \leq t \leq x$ に対して $\frac{1}{t} \leq 1$ であり、区間は正の向きであるから、

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \int_1^x 1\,\mathrm{d}t, \qquad \text{すなわち} \qquad \ln x \leq x - 1.$$

$0 < x \leq 1$ の場合。 今度は $x \leq t \leq 1$ の範囲で積分する。ここでは $t \leq 1$ であるから $\frac{1}{t} \geq 1$ である。よって

$$\int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \geq \int_x^1 1\,\mathrm{d}t, \qquad \text{すなわち} \qquad -\ln x \geq 1 - x.$$

両辺に -1 を掛けると不等式の向きが反転し、再び $\ln x \leq x - 1$ が得られる。したがって $(*)$ はすべての $x > 0$ で成り立つ。

小問 (ii)

$x \geq 1$ の場合。 $t \geq 1$ に対して $\frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{t}$ であるから、

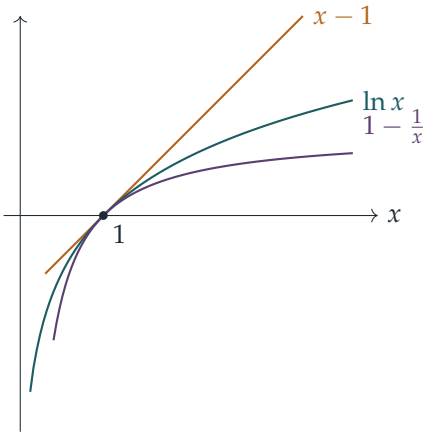
$$\int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \leq \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t, \qquad \text{すなわち} \qquad 1 - \frac{1}{x} \leq \ln x.$$

$0 < x \leq 1$ の場合。 $x \leq t \leq 1$ では不等式が反転し、$\frac{1}{t^2} \geq \frac{1}{t}$ となる（$t \leq 1$ に正の数 $\frac{1}{t^2}$ を掛ければよい）。$[x, 1]$ 上で積分すると

$$\frac{1}{x} - 1 \geq -\ln x,$$

となり、両辺に -1 を掛けると $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$ が得られる。したがって $(**)$ はすべての $x > 0$ で成り立つ。

（別解として、$(**)$ は $(*)$ からただちに導かれる。$(*)$ の x に $1/x$ を代入すれば $-\ln x \leq \frac{1}{x} - 1$ が得られる。）



3つの曲線はすべて $x = 1$ で接し、そこでの傾き（gradient）はいずれも1である。$\ln x$ は他の2つの曲線に挟まれている。

小問 (iii)

$(*)$ と $(**)$ はいずれも、ある関数が $x > 0$ で非負であることを述べている：

$$f(x) = x - 1 - \ln x \geq 0, \qquad g(x) = \ln x - 1 + \frac{1}{x} \geq 0.$$

このような関数の積分について、簡単な事実が必要になる。

考えてみよう すべての $x>0$ で $h(x)\geq 0$ であるとき、$y<1$ ならば $\int_1^y h(x)\,\mathrm{d}x$ の符号はどうなるか？

$y>1$ ならば積分は正の向きの区間上でとられるので ≥ 0 である。$0<y<1$ ならば $\int_1^y h = -\int_y^1 h \leq 0$ である。いずれの場合も

$$(y-1)\int_1^y h(x)\,\mathrm{d}x \ \geq\ 0.$$

これにより、$y>1$ と $0<y<1$ の両方の場合をまとめて扱うことができる。

$\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x$ が必要である（$u=\ln x$ として部分積分（integration by parts）を行う）。よって

$$\int_1^y \ln x\,\mathrm{d}x = y\ln y - y + 1.$$

右側の不等式。 f を積分すると、

$$\begin{aligned}\int_1^y f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{(y-1)^2}{2} - (y\ln y - y + 1) = \frac{(y-1)^2}{2} + (y-1) - y\ln y \\ &= \frac{(y-1)(y+1)}{2} - y\ln y.\end{aligned}$$

上の事実より、

$$(y-1)\left[\frac{(y-1)(y+1)}{2} - y\ln y\right] \geq 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{(y-1)^2(y+1)}{2} \geq y(y-1)\ln y.$$

$y>0$ かつ $y\neq 1$ であるから $y(y-1)^2$ は正であり、これで割っても不等式の向きは変わらない：

$$\frac{y+1}{2y} \geq \frac{\ln y}{y-1}.$$

左側の不等式。 g を積分すると、

$$\int_1^y g(x)\,\mathrm{d}x = (y\ln y - y + 1) - (y-1) + \ln y = (y+1)\ln y - 2(y-1).$$

上の事実より、

$$(y-1)[(y+1)\ln y - 2(y-1)] \geq 0 \quad\Longrightarrow\quad (y+1)(y-1)\ln y \geq 2(y-1)^2.$$

ここで $(y+1)(y-1)^2>0$ で割ると、

$$\frac{\ln y}{y-1} \geq \frac{2}{y+1}.$$

2 つを合わせると、

$$\frac{2}{y+1} \leq \frac{\ln y}{y-1} \leq \frac{y+1}{2y} \qquad \text{ただし} y>0,\ y\neq 1,$$

となり、示すべき不等式が得られた。

考えてみよう すぐに割るのではなく、割る前に $y-1$ を掛けるのはなぜか？

不等式を $y-1$ で割ると、$y<1$ のときには向きが反転するため、2 つの場合に分けざるを得なくなる。先に $y-1$ を掛ければ $(y-1)^2$ を含む式が得られ、これは y が 1 のどちら側にあっても正であるから、1 つの議論で両方の場合を扱える。

検算

- $y=2$ のとき：$\frac{2}{3}\approx 0.667 \le \ln 2 \approx 0.693 \le \frac{3}{4}=0.75$。
- $y=\frac{1}{2}$ のとき：$\frac{4}{3}\approx 1.333 \le 2\ln 2 \approx 1.386 \le \frac{3}{2}$。
- $y\to 1$ のとき、3 つの式はすべて 1 に収束する（中央の式は 1 における ln の傾きである）。これは図で曲線が接していることと整合する。
- y を $1/y$ で置き換え、両辺を y で割ると、まったく同じ 2 つの不等式が得られる。したがって $0<y<1$ に対する結果は $y>1$ に対する結果と同値である。

よくある間違い

- $x<1$ のときに $[1,x]$ 上で積分し、不等式の向きが反転することに気づかない。
- $y-1$ の符号を考えずにそれで割ってしまい、結果として小問 (iii) を $y>1$ の場合しか証明していない。

STEP のその先へ

中央の量 $\dfrac{\ln y}{y-1}$ は 1 と y の**対数平均**（logarithmic mean）の逆数（reciprocal）であり、左側の不等式は、対数平均が算術平均（arithmetic mean）$\frac{1+y}{2}$ 以下であることを述べている。実は対数平均は幾何平均（geometric mean）$\sqrt{y}$ 以上でもあり、そこから $\frac{\ln y}{y-1} \le \frac{1}{\sqrt{y}}$ が得られる。これは $\frac{y+1}{2y}$ よりも精密な上界である。不等式を積分するという手法と、それを正当化する積分の単調性（monotonicity）は、大学最初の解析学（analysis）の講義における基本的な道具である。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）は積分を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。