解答例

STEP I 2017、第 13 問

確率・統計 ・ 確率の漸化式

> **STEP I 2017、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q13

鍵となる考え方

パンの各スライスについて、それがどう使われるかに注目する。トーストになるか、サンドイッチの 1 枚目になるか、サンドイッチの 2 枚目になるかである。このうちちょうど一つが起こり、どれが起こりうるかは直前のスライスによって決まる。スライス $r-1$ で軽食が一つ終われば、スライス r は新しい軽食を始める。終わらなければ、スライス r はサンドイッチの後半でなければならない。これにより一階の漸化式（first-order recurrence）が得られ、それを不動点（fixed point）を引き去るといういつもの方法で解く。

解答

設定

スライスを使う順に $1, 2, \ldots, n$ と番号をつける。各スライス r について、次のうちちょうど一つが起こる。

- T_r：スライス r がトーストに使われる。
- A_r：スライス r がサンドイッチの 2 枚のうちの 1 枚目である。
- S_r：スライス r がサンドイッチの 2 枚のうちの 2 枚目である。

したがって $t_r = \mathrm{P}(T_r)$、$s_r = \mathrm{P}(S_r)$、$\mathrm{P}(A_r) = 1 - s_r - t_r$ である。T_r または S_r が起こるとき、スライス r は**軽食を終える**ということにする。その確率（probability）は $s_r + t_r$ である。

最初のスライスは最初の軽食を始めるので、サンドイッチの 2 枚目にはなりえない。

$$s_1 = 0.$$

（また、$n \geq 2$ ならば $t_1 = p$、$n = 1$ ならば $t_1 = 1$ である。）

二つの方程式

t_r の方程式。スライス r が新しい軽食を始めるのは、スライス $r-1$ が軽食を終えるときであり、そのときに限る。その確率は $s_{r-1} + t_{r-1}$ である。スライス r が軽食を始めるという条件のもとでは、残りはスライス $r, r+1, \ldots, n$ であり、$r \leq n-1$ ならばそれは少なくとも 2 枚あるので、それ以前に何が起こったかによらず、確率 p でトーストを選ぶ。スライス $r-1$ が軽食を終えない場合は、スライス r はサンドイッチを完成させるのでトーストではない。よって

$$t_r = (s_{r-1} + t_{r-1})\, p \qquad (2 \leq r \leq n-1).$$

これは $r = n$ では成り立たない。最後のスライスで始まる軽食は確実にトーストになるからである。

s_r の方程式。スライス r がサンドイッチの 2 枚目になるのは、スライス $r-1$ がサンドイッチの 1 枚目であるとき、すなわちスライス $r-1$ が軽食を終えないときであり、そのときに限る。よって

$$s_r = 1 - (s_{r-1} + t_{r-1}) \qquad (2 \leq r \leq n).$$

ここでは残りのスライスの枚数に関する条件は必要ないので、これは $r = n$ まで成り立つ。

s_r の漸化式

二つ目の方程式で r を $r+1$ に置き換えると $s_r + t_r = 1 - s_{r+1}$ となるので、一つ目の方程式は

$$t_r = p\,(1 - s_r) \qquad (2 \leq r \leq n-1).$$

と書き直せる。$n \geq 2$ のとき、$t_1 = p$ かつ $s_1 = 0$ であるから、これは $r = 1$ でも成り立つ。$1 \leq r-1 \leq n-1$ のとき成り立つ $t_{r-1} = p(1 - s_{r-1})$ を s_r の方程式に代入すると、

$$\begin{aligned} s_r &= 1 - s_{r-1} - p(1 - s_{r-1}) \\ &= (1-p)(1 - s_{r-1}) \\ &= q\,(1 - s_{r-1}), \end{aligned}$$

が $2 \leq r \leq n$ で成り立ち、特に要求どおり $2 \leq r \leq n-1$ で成り立つ。

漸化式を解く

考えてみよう $s_r = q - qs_{r-1}$ はどう解けばよいか。これを満たす定数列は何か。

定数解 $s_r = c$ であるためには $c = q - qc$ が必要なので、$c = \dfrac{q}{1+q}$ である。漸化式から $c = q - qc$ を引くと

$$s_r - \frac{q}{1+q} = -q\left(s_{r-1} - \frac{q}{1+q}\right),$$

となるので、$s_r - \frac{q}{1+q}$ は各段階で $-q$ 倍される。$s_1 - \frac{q}{1+q} = -\frac{q}{1+q}$ から始めると

$$s_r - \frac{q}{1+q} = (-q)^{r-1}\left(-\frac{q}{1+q}\right) = \frac{(-q)^r}{1+q},$$

となり、

$$s_r = \frac{q + (-q)^r}{1+q} \qquad (1 \le r \le n-1).$$

を得る。（漸化式は $r = n$ まで成り立つので、実は同じ式が $r = n$ でも成り立つ。）

t_r については $t_r = p(1 - s_r)$ と

$$1 - s_r = \frac{1 + q - q - (-q)^r}{1+q} = \frac{1 - (-q)^r}{1+q},$$

を用いて、

$$t_r = \frac{p\left(1 - (-q)^r\right)}{1+q} \qquad (1 \le r \le n-1).$$

となる。

最後のスライス

上で述べたように、s_r の方程式と漸化式 $s_r = q(1 - s_{r-1})$ は $r = n$ でも成り立つので、公式はそのまま続く。

$$s_n = \frac{q + (-q)^n}{1+q}.$$

最後のスライスの後には何もないので、それがサンドイッチの 1 枚目になることはない。したがってトーストかサンドイッチの 2 枚目のいずれかであり、$t_n = 1 - s_n$ である。

$$t_n = \frac{1 - (-q)^n}{1+q}.$$

$r < n$ の場合の t_r と比べると、因数 p が消えている。最後のスライスで軽食が始まれば、トーストになることは確実だからである。（これらは $n = 1$ のときにも成り立ち、$s_1 = 0$ と $t_1 = 1$ を与える。）

検算

- $n = 3$、$p = q = \frac{1}{2}$ とする。起こりうる順序は、トースト—トースト—トースト（確率 $\frac{1}{4}$）、トーストの後にサンドイッチ（確率 $\frac{1}{4}$）、サンドイッチの後にトースト（確率 $\frac{1}{2}$）である。よって $s_3 = \frac{1}{4}$、$t_3 = \frac{3}{4}$ である。公式からは $s_3 = \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{8}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{4}$ および $t_3 = \dfrac{1 + \frac{1}{8}}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{4}$ が得られる。
- $q = 0$（常にトースト）のとき、すべての r について $s_r = 0$、$t_r = 1$ となり、当然そうあるべき結果である。
- r が大きくなると $s_r \to \frac{q}{1+q}$ となる。これは納得のいく結果である。長い目で見れば軽食のうち割合 q がサンドイッチであり、それぞれに「2 枚目」が 1 枚ずつある。また軽食 1 回あたり平均 $1 + q$ 枚のスライスを使うので、スライスのうち割合 $\frac{q}{1+q}$ が 2 枚目となる。
- $n \leq 12$ といくつかの p の値について、すべての軽食の列を厳密に数え上げることにより、すべての公式をコンピュータで確認した。

よくある間違い

- $t_n = p(s_{n-1} + t_{n-1})$ を使ってしまうこと。最後のスライスで軽食が始まるとき、それがトーストになる確率は p ではなく 1 である。
- 事象「スライス $r - 1$ がトーストである」と「スライス r がトーストである」が独立であると考えてしまうこと。これらは独立ではない。重要なのはスライス r が軽食を始めるかどうかであり、それはそれまでの経過に依存する。
- 漸化式を解くときに符号を落とすこと。公比は $-q$ なので、答えは $\frac{q}{1+q}$ の上下を交互に振動する。

STEP のその先へ

スライス r が新しい軽食を始めるかどうかは、単純な**再生過程**（renewal process）をなす。軽食の長さは互いに独立で、それぞれ 1 か 2 であり、極限 $\frac{q}{1+q}$ は再生定理（renewal theorem）の一例である（長期的な再生の頻度は、間隔の平均の逆数に等しい）。同じことだが、各スライスの種類はマルコフ連鎖（Markov chain）をなし、$(-q)^r$ はそれが初期状態をどれだけ速く忘れるかを表している。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、マルコフ連鎖とこの種の漸化式の両方を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。