解答例

STEP I 2017、第 11 問

力学 ・ 摩擦のある剛体の静力学

STEP I 2017、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/17-s1-q11

鍵となる考え方

すべては箱のある一つの鉛直断面の中で起こり、その断面は角 α だけ傾いた正方形である。したがって自然な座標軸は水平・鉛直ではなく、箱の底面に沿う方向と側面に沿って上がる方向である。こうすると二つの垂直抗力（normal reaction）はどちらも軸に沿い、分解が必要なのは重力だけになる。二方向への力の分解（resolving）から垂直抗力の間の関係式が一つ得られ、中点のまわりのモーメント（moment）のつり合いの式（重力の寄与が消える）からもう一つ得られる。これらを tan の加法定理（compound-angle formula）を用いて比較すると答えが得られる。

解答

モデルと力

棒を一様な剛体の棒とみなし、棒を含む鉛直面内で考える。この面内で、箱の底面は最大傾斜線（line of greatest slope）に沿っており、水平と角 α をなす。また O を通る側面は底面に垂直である。O を原点として次のように軸をとる。

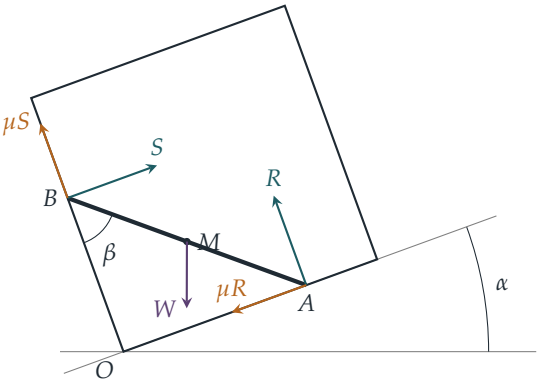
- x 軸：箱の底面に沿い、斜面を上る向き（A の向き）
- y 軸：箱の側面に沿い、斜面に垂直な向き（B の向き）

側面は底面に垂直であるから、三角形 OAB は O で直角であり、B における角は β である。よって

$$OA = 2L\sin\beta, \qquad OB = 2L\cos\beta.$$

$\mu = \tan\gamma$ とおく。棒にはたらく力は次のとおりである。

- A において：$+y$ 方向の垂直抗力 R、および O に向かう向き（$-x$ 方向）の摩擦力（friction）μR。A はまさに O から遠ざかる向きに滑り出そうとしており、摩擦力は最大摩擦力に達しているからである。
- B において：$+x$ 方向の垂直抗力 S、および O から遠ざかる向き（$+y$ 方向）の摩擦力 μS。B はまさに O に向かって滑り出そうとしているからである。
- 中点 M において鉛直下向きにはたらく重力 W。y 軸は鉛直上向きと角 α をなすので、重力の成分は x 方向に $-W\sin\alpha$、y 方向に $-W\cos\alpha$ である。



力の分解

箱の底面に沿う方向（x）と側面に沿う方向（y）に分解すると

$$S - \mu R - W\sin\alpha = 0, \tag{1}$$

$$R + \mu S - W\cos\alpha = 0. \tag{2}$$

$R + \mu S = W\cos\alpha \neq 0$ であるから、(1) を (2) で割って

$$\frac{S - \mu R}{R + \mu S} = \tan\alpha. \tag{3}$$

中点のまわりのモーメント

重力は M にはたらくので、M のまわりのモーメントをもたない。M から見ると、点 A は $(L\sin\beta, -L\cos\beta)$、点 B は $(-L\sin\beta, L\cos\beta)$ にある。図における反時計回りのモーメントをとると（相対位置 (p,q) にはたらく力 (F_x, F_y) のモーメントは $pF_y - qF_x$ である）

$$\text{点}A: \quad L\sin\beta\cdot R - (-L\cos\beta)(-\mu R) = LR(\sin\beta - \mu\cos\beta),$$

$$\text{点}B: \quad -L\sin\beta\cdot\mu S - L\cos\beta\cdot S = -LS(\cos\beta + \mu\sin\beta).$$

これらの和は 0 でなければならないから

$$R(\sin\beta - \mu\cos\beta) = S(\cos\beta + \mu\sin\beta).$$

ここで $\mu = \tan\gamma$ とおき、両辺に $\cos\gamma$（正である）を掛けると

$$R(\sin\beta\cos\gamma - \cos\beta\sin\gamma) = S(\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma),$$
$$\text{すなわち、} \quad R\sin(\beta-\gamma) = S\cos(\beta-\gamma).$$

考えてみよう R や $\cos(\beta-\gamma)$ で割ってよいだろうか？

二つの垂直抗力はどちらも押す力であるから、$R > 0$ かつ $S > 0$ である。すると $\sin(\beta-\gamma)$ と $\cos(\beta-\gamma)$ が同時に 0 になることはなく、$R, S > 0$ のもとで $S\cos(\beta-\gamma) = R\sin(\beta-\gamma)$ であるから両者は同符号である。したがってどちらも 0 ではなく、$\tan(\beta-\gamma) > 0$ となる。β と γ はともに $(0, \frac{1}{2}\pi)$ に属するので、$\beta-\gamma$ は $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ に属し、実際には

$$\frac{S}{R} = \tan(\beta-\gamma), \qquad 0 < \beta-\gamma < \tfrac{1}{2}\pi. \tag{4}$$

二つの結果を組み合わせる

(3) の左辺の分子と分母を R で割り、$k = S/R = \tan(\beta-\gamma)$、$\mu = \tan\gamma$ とおくと

$$\tan\alpha = \frac{k-\mu}{1+k\mu} = \frac{\tan(\beta-\gamma)-\tan\gamma}{1+\tan(\beta-\gamma)\tan\gamma} = \tan\big((\beta-\gamma)-\gamma\big) = \tan(\beta-2\gamma),$$

となる。ここで加法定理を用いた（分母 $1+k\mu$ は正なので、定義されない項は生じない）。(4) と $0 < \gamma < \frac{1}{2}\pi$ より

$$\beta - 2\gamma = (\beta-\gamma) - \gamma \in \left(-\tfrac{1}{2}\pi,\ \tfrac{1}{2}\pi\right),$$

であり、また $\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ でもある。正接関数は $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 上で単射（one-to-one）であるから、$\tan\alpha = \tan(\beta-2\gamma)$ より

$$\beta = \alpha + 2\gamma,$$

が従い、示すべき式が得られた。これは問題文の条件 $\alpha < \beta$ と矛盾しない。またこの結果から、このような配置は $\alpha + 2\gamma < \frac{1}{2}\pi$ のときに限り可能であることもわかる。

検算

- **なめらかな箱：** $\gamma = 0$ のとき、結果は $\beta = \alpha$ となる。これを直接確かめよう。摩擦がなければ、二つの垂直抗力は点 P で交わる。P は、AB を対角線とし辺が箱の面

に沿う長方形の第四の頂点である。つり合っている三つの力は一点で交わらなければならないので、M を通る重力の作用線は P を通る。すなわち MP は鉛直である。対角線 MP は、OB を O から離れる側へ β だけ回転した向きに平行であり、一方 OB 自身は鉛直に対して O の側へ α だけ傾いている。よって MP は鉛直と角 $\beta - \alpha$ をなし、MP が鉛直になるのはちょうど $\beta = \alpha$ のときである。

- **数値例**：$\alpha = 20°$、$\gamma = 15°$ とすると $\beta = 50°$ である。このとき (1) と (2) から $R \approx 0.791W$、$S \approx 0.554W$（ともに正）が得られ、$S/R \approx 0.700 \approx \tan 35°$ となり、M のまわりのモーメントの総和は 0 になる。

よくある間違い

- 水平方向と鉛直方向に分解すること。これでも解けるが、四つの接触力すべてを分解する必要が生じ、計算がはるかに重くなる。
- 摩擦力の向きを誤ること。摩擦力は今にも起ころうとしている運動を妨げる向きにはたらく。A では O に向かう向き、B では O から遠ざかる向き（側面を上る向き）である。
- 二つの角が tan が単射となる区間に属する理由を述べずに、$\tan\alpha = \tan(\beta - 2\gamma)$ から結論を導くこと。

STEP のその先へ

$\mu = \tan\gamma$ として摩擦力を μR と書くことは、**摩擦角**（angle of friction）の考え方そのものである。限界平衡（limiting equilibrium）においては、接触力の合力は法線を軸とする半頂角 γ の「摩擦円錐」の縁の上にある。粗い面に接して静止する剛体に関する問題は、これらの円錐と、一点で交わる三つの力についての幾何の問題に帰着する。くさび、はしご、積み重ねた物体の安定性も、同じ描像に基づいている。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の静力学とトルクを基本原理から丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。