解答例

STEP I 2017、第 10 問

力学 ・ 連鎖的な衝突

STEP I 2017、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/17-s1-q10

鍵となる考え方

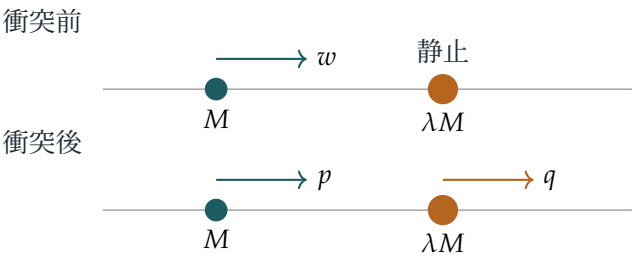
連鎖の中の衝突はどれも同じ形をしている。質量 M で速さ w で運動する粒子が、静止している質量 λM の粒子に衝突するのである。そこで、この一つの衝突を比 λ を用いて一度だけ解いておけば、連鎖全体はそれを繰り返すことで得られ、等比数列（geometric sequence）が現れる。その後の各小問では、衝突後に粒子に残る速度を比較して、前方の粒子に追いつく粒子があるかどうかを調べればよい。

解答

すべての粒子を x 軸上を運動する質点とみなし、速度は x 軸の正の向きを正として測る。

典型的な一つの衝突

質量 M で速さ w で運動する粒子 A が、静止している質量 λM の粒子 B に衝突する。衝突後の速度をそれぞれ p、q とする。



運動量保存則（conservation of momentum）とニュートン（Newton）の反発の法則（Newton's experimental law）より

$$Mw = Mp + \lambda Mq, \qquad q - p = ew.$$

$p = q - ew$ を第 1 式に代入すると $w = q - ew + \lambda q$ となるから、

$$q = \frac{1+e}{1+\lambda}\, w, \qquad p = q - ew = \frac{1-\lambda e}{1+\lambda}\, w.$$

$r = \dfrac{1+e}{1+\lambda}$、$s = \dfrac{1-\lambda e}{1+\lambda}$ とおく。

$$q - p = ew > 0$$

であるから、このような衝突の直後には二つの粒子は互いに離れていくことに注意する。

小問 (i)

最初の衝突は、P（質量 m、速さ u）が P_1（質量 λm）に衝突するものである。$w = u$、$M = m$ とすると

$$u_1 = \frac{1+e}{1+\lambda}\, u$$

となり、これが求める結果である。また P には速度 su が残る。

次に P_1 が動き出して、質量 $\lambda^2 m = \lambda \cdot (\lambda m)$ の P_2 に衝突する。質量比は再び λ であるから、これは $w = u_1$ とした同じ衝突である。一般に、P_n（質量 $\lambda^n m$）は速さ u_n で P_{n+1}（質量 $\lambda^{n+1} m$）に衝突するから、$u_{n+1} = r u_n$ であり、P_n には速度 $s u_n$ が残る。したがって

$$u_n = \left(\frac{1+e}{1+\lambda}\right)^n u.$$

ここで P_n の 1 回目の衝突は P_{n-1} に衝突されることであり、2 回目の衝突は P_{n+1} に衝突することである。（1 回目の衝突の直後、P_n は P_{n-1} から遠ざかっているので、後方の粒子が先に追いつかない限り、次に起こりうるのは P_{n+1} に到達することである。これが問題の意図する一連の事象であり、小問 (ii)–(iv) ではそれが実際に起こることを確かめる。）よって

$$v_n = s u_n = \frac{(1-\lambda e)(1+e)^n}{(1+\lambda)^{n+1}}\, u$$

であり、これは x 軸の正の向きの速度として表したものである。速さとしてはこの絶対値をとることになるが、それが問題になるのは $\lambda e > 1$ のとき、すなわち P_n がはね返されるときだけである。

小問 (ii)

$e > \lambda$ とする。このとき $\lambda < e < 1$ であるから $\lambda e < 1$ であり、$s > 0$ である。また $r > 1$ である。

衝突は順に起こる。まず P と P_1、次に P_1 と P_2、次に P_2 と P_3、以下同様である。P_n が P_{n+1} に衝突した後、列の後方から順に $P, P_1, \ldots, P_n, P_{n+1}, P_{n+2}, \ldots$ の速度は

$$su,\ su_1,\ su_2,\ \ldots,\ su_n,\ u_{n+1},\ 0,\ 0,\ \ldots$$

である。$u_k = r^k u$ で $r > 1$、$s > 0$ であるから

$$0 < su < su_1 < su_2 < \cdots < su_n,$$

であり、さらに $u_{n+1} - su_n = (r - s)u_n = eu_n > 0$ より $u_{n+1} > su_n$ である。したがって $P, P_1, \ldots, P_{n+1}$ の中では、どの粒子もすぐ後ろの粒子より真に速く運動しており、これらのうちのどの二つも再び出会うことはない。残る衝突は P_{n+1} が静止している P_{n+2} に到達することだけであり、そのあとは n を $n+1$ に置き換えて同じ議論が成り立つ。

よって各 P_n（$n \geq 1$）は、P_{n-1} に一度衝突され、次に P_{n+1} に一度衝突し、それ以外の衝突には一切関わらない。すなわち、ちょうど 2 回ずつ衝突する。（これにより、(i) で仮定した事象の順序も確かめられた。）

小問 (iii)

$e = \lambda$ ならば $r = 1$ であり、$s = \dfrac{1 - e^2}{1 + e} = 1 - e$ である。よって

$$u_n = u \quad \text{かつ} \quad v_n = (1 - e)u \ \text{すべての} n,$$

が成り立ち、P にも速度 $(1 - e)u$ が残る。この運動は直線上を伝わるパルスである。先頭の粒子はつねに速さ u で運動し、次の粒子に衝突すると速さ u を受け渡して自らは $(1 - e)u$ に落ちる。後方の粒子はすべて $(1 - e)u$ で一緒に運動するので、それらの間ではもう衝突は起こらず、速さ u の先頭の粒子はそれらから離れていく。各 P_n はちょうど 2 回の衝突に関わる。

N 回の衝突の後、$P, P_1, \ldots, P_{N-1}$ は $(1 - e)u$ で運動し、P_N（質量 $\lambda^N m = e^N m$）は u で運動する。運動エネルギー（kinetic energy）は

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}m(1-e)^2u^2(1 + e + \cdots + e^{N-1}) + \tfrac{1}{2}e^N mu^2 &= \tfrac{1}{2}mu^2\left[(1-e)^2\,\frac{1 - e^N}{1 - e} + e^N\right] \\
&= \tfrac{1}{2}mu^2[(1-e)(1-e^N) + e^N] \\
&= \tfrac{1}{2}mu^2[1 - e + e^{N+1}].
\end{aligned}$$

である。これを初めのエネルギー $\frac{1}{2}mu^2$ で割ると、N 回の衝突の後に失われた割合は

$$1 - (1 - e + e^{N+1}) = e(1 - e^N) \to e \quad \text{極限} N \to \infty,$$

となる。ここで $0 < e < 1$ を用いた。これが求める結果である。

小問 (iv)

$\lambda e = 1$ ならば $s = 0$ であり、

$$r = \frac{1+e}{1+1/e} = \frac{e(1+e)}{e+1} = e.$$

となる。よって衝突のたびに、運動していた粒子はぴたりと静止する。P が止まり、次に P_1 が eu で動き出して P_2 に衝突して止まり、以下同様であって、$u_n = e^n u$、$v_n = 0$ である。各 P_n はちょうど 2 回衝突し、粒子は互いに隣と接した状態で静止し、ただ一つの粒子だけが次第に遅くなりながら運動を前方へ運んでいく。P_n が P_{n+1} に到達するのにかかる時間は $1/(e^n u)$ であるから、衝突と衝突の間隔は限りなく大きくなる。

> **考えてみよう** 運動量は保存されるのに、どうしてエネルギーが失われうるのだろうか。

N 回の衝突の後に運動しているのは P_N だけであり、その質量は $\lambda^N m = e^{-N} m$、速さは $e^N u$ である。その運動量は当然 $e^{-N} m \cdot e^N u = mu$ であるが、運動エネルギーは

$$\tfrac{1}{2}\, e^{-N} m\, (e^N u)^2 = e^N \cdot \tfrac{1}{2} m u^2.$$

である。運動量はますます重く、ますます遅い粒子によって運ばれていき、運動量 p を固定すると運動エネルギー $p^2/(2M)$ は質量 M が大きくなるにつれてゼロに近づく。残る割合 e^N は 0 に収束するので、最終的には初めの運動エネルギーが**すべて**失われる。

検算

- $e = 1$、$\lambda = 1$（等しい質量、完全弾性衝突）とすると、$u_1 = u$ で P は止まる。これはおなじみのニュートンのゆりかご（Newton's cradle）での速度の入れ替わりである。
- (iii) で、1 回の衝突（$N = 1$）で失われる割合は $e(1-e)$ である。直接計算すると、P は最終的に $(1-e)u$、質量 em の P_1 は u となるから、残るエネルギーは元の $(1-e)^2 + e = 1 - e + e^2$ 倍であり、一致する。
- 衝突を厳密な分数で一つずつ計算するコンピュータ・シミュレーションにより、u_n と v_n の公式、$e > \lambda$ のときの「各粒子 2 回ずつ」の衝突パターン、失われる割合 $e(1-e^N)$（$e = \frac{1}{2}$ のとき、25 回の衝突の後で 0.49999998）、および $\lambda e = 1$ のときの残る割合 e^N が確かめられた。

よくある間違い

- ニュートンの法則を $q - p = -ew$ と書いたり、向きを逆にしたりすること。遠ざかる速さは近づく速さの e 倍であり、ここではどちらも正である。
- 質量比がどの衝突でも λ であることを忘れること。これこそが答えを等比的にしているのである。
- 事象の順序を確かめずに仮定してしまうこと。$e < \lambda$ かつ $\lambda e < 1$ のときは、取り残された粒子が、前方の粒子が次の粒子に到達する前にそれに追いつくことがあり、単純なパターンは崩れる。

STEP のその先へ

小問 (iv) は、運動量とエネルギーがまったく異なる振る舞いをすることを示している。運動量は厳密に保存されるのに、エネルギーはますます重い粒子によって運ばれるために完全に失われていく。衝突する粒子の連鎖は、密度が変化する媒質の中をパルスが伝わる様子の簡単なモデルであり、離散的な格子（lattice）における波の伝播へとつながっていく。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、衝突と重心系（centre-of-mass frame）をこのように丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。