解答例

STEP I 2017、第 1 問

純粋数学 ・ 置換積分

> **STEP I 2017、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q1

鍵となる考え方

三角関数の分数を払ってしまえば、これらの被積分関数（integrand）はどれも実は $f'(x)/f(x)$ の形（最後のものだけは $f'(x)/f(x)^2$ の形）をしている。$x\sin x+\cos x$ の導関数（derivative）は二つの $\sin x$ の項が打ち消し合うために際立って簡潔になり、ほかの置換もこれと同じ打ち消し合いの上に組み立てられている。したがって方針は次のとおりである。各被積分関数を sin と cos（あるいは sec と tan）で書き直し、導関数が分子と一致する分母を見つけ、それを置換する。

解答

小問 (i)

$u=x\sin x+\cos x$ とおくと、積の微分法（product rule）により

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x.$$

ここで被積分関数の分子と分母に $\cos x$ を掛けると

$$\frac{x}{x\tan x+1}=\frac{x\cos x}{x\sin x+\cos x}.$$

分子はちょうど $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ であるから、$x\cos x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$ となり

$$\int\frac{x}{x\tan x+1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u=\ln|u|+C=\ln|x\sin x+\cos x|+C.$$

二つ目の積分では、$\cos x$ の代わりに $\sin x$ を用いて同じことを行う。分子と分母に $\sin x$ を掛けると

$$\frac{x}{x\cot x-1}=\frac{x\sin x}{x\cos x-\sin x}.$$

$v = x\cos x - \sin x$ とおく。すると

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \cos x - x\sin x - \cos x = -x\sin x,$$

であるから、分子は $-\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ となり

$$\int \frac{x}{x\cot x - 1}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v = -\ln|x\cos x - \sin x| + C.$$

マイナス符号を落とさないこと。これは $\cos x$ を微分したことから生じるものである。

小問 (ii)

一つ目の被積分関数には、試してみる価値のある分母がすでにある。$w = x\sec^2 x - \tan x$ とおく。$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec^2 x = 2\sec^2 x\tan x$ を用いると

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \sec^2 x + 2x\sec^2 x\tan x - \sec^2 x = 2x\sec^2 x\tan x.$$

ここでも不要な項が打ち消し合い、分子は $\frac{1}{2}\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$ となる。よって

$$\int \frac{x\sec^2 x\,\tan x}{x\sec^2 x - \tan x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{w}\,\mathrm{d}w = \tfrac{1}{2}\ln|x\sec^2 x - \tan x| + C.$$

? **考えてみよう** 最後の積分には sec も tan も現れない。これを $w = x\sec^2 x - \tan x$ とどう結びつければよいだろうか？

分母の括弧の中から $\cos^2 x$ をくくり出す：

$$x - \sin x\cos x = \cos^2 x\left(x\sec^2 x - \frac{\sin x}{\cos x}\right) = \cos^2 x\,(x\sec^2 x - \tan x) = w\cos^2 x.$$

したがって $(x - \sin x\cos x)^2 = w^2\cos^4 x$ であり、

$$\frac{x\sin x\cos x}{(x-\sin x\cos x)^2} = \frac{x\sin x\cos x}{w^2\cos^4 x} = \frac{x\sec^2 x\tan x}{w^2},$$

となる。$\dfrac{\sin x\cos x}{\cos^4 x} = \dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$ だからである。分子は再び $\frac{1}{2}\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$ であるから、同じ置換により

$$\begin{aligned}\int \frac{x\sin x\cos x}{(x-\sin x\cos x)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{w^2}\,\mathrm{d}w = -\frac{1}{2w} + C\\ &= -\frac{1}{2(x\sec^2 x - \tan x)} + C = -\frac{\cos^2 x}{2(x-\sin x\cos x)} + C,\end{aligned}$$

ここで最後の変形では分子と分母に $\cos^2 x$ を掛けた。2 倍角の形を好むなら、これは $-\dfrac{\cos^2 x}{2x - \sin 2x} + C$ である。

検算

- それぞれの答えを微分し、被積分関数に戻ることを確かめよ。最後のものについては、$-\cos^2 x/\big(2(x-\sin x\cos x)\big)$ に商の微分法（quotient rule）を適用する際に $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x-\sin x\cos x) = 1-\cos 2x = 2\sin^2 x$ を用いると、$\sin^2 x\cos^2 x$ の項がきれいにまとまる。
- 数値計算：区間 $[0.3, 1.2]$ において一つ目の積分の値は $0.34953\ldots$ であり、$\ln|x\sin x+\cos x|$ の変化量もこれと等しい。同じ区間での最後の積分の値は $25.7364\ldots$ であり、$-\cos^2 x/\big(2(x-\sin x\cos x)\big)$ と一致する。四つの答えはすべて、この方法によりコンピュータで確認済みである。

よくある間違い

- $\tan x$ や $\cot x$ を先に払わずに置換してしまうこと。分子が $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ と一致するのは、全体に $\cos x$ または $\sin x$ を掛けた後に限られる。
- 小問 (i) の二つ目の積分のマイナス符号や、小問 (ii) の係数 $\frac{1}{2}$ を落とすこと。
- 最後の積分で、習慣的に対数に手を伸ばしてしまうこと。$1/w^2$ を積分すると $-1/w$ になる。

STEP のその先へ

ここでの技法は逆算である。すなわち、打ち消し合いの後で分母の導関数がちょうど分子になるように置換を選ぶのである。その背後には $\int f'/f = \ln|f|$、すなわち対数微分（logarithmic derivative）という事実があり、これは複素解析（complex analysis）において（関数の零点を数える際に）、また微分方程式においては積分因子（integrating factor）として再び現れる。STEP の積分問題の多くは、注意深く選んだ関数を微分し、答えを隠すことで作られている。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の問題集）には、そうした構造を見抜く練習問題がさらに豊富に収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。