解答例

STEP III 2016、第 9 問

力学 ・ ばねと単振動

> **STEP III 2016、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q9

鍵となる考え方

原点を三角形の中心にとり、対称性（symmetry）を利用する。平衡位置（equilibrium position）は中心であり、そこでは等しい三つの張力（tension）が打ち消し合う。粒子が P に向かう直線に沿って動くとき、ばね QX と RX は互いに鏡像の関係を保つので、横向きの引く力は打ち消し合い、運動はその直線上にとどまる。RX を求めるには余弦定理（cosine rule）が必要である。周期（period）を求めるには、厳密な復元力（restoring force）を書き下し、そのうえで小さな変位（displacement）について 1 次の項だけを残す。

解答

X をなめらかな台の上の質点とし、ばねはフックの法則（Hooke's law）に従う軽いばねとしてモデル化する。すなわち、長さ r のばねの張力は $\frac{\lambda}{l}(r-l)$ である。

平衡

三角形の中心を O とする。各頂点は O から距離

$$c = \frac{2}{3} \times (\text{高さ}) = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}\, a = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

の位置にあり、直線 OP、OQ、OR は互いに 120° をなす。X が O にあるとき、各ばねの長さは c であるから、三つの張力はすべて等しい。互いに 120° をなす等しい三つの力の和は零であるから、O は平衡位置である。以下ではこの平衡を用いる。$l < \frac{2}{\sqrt{3}}a$

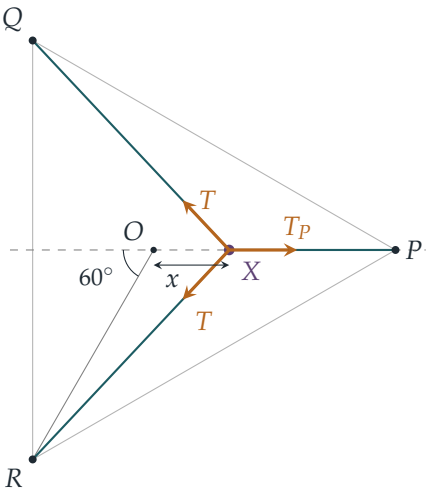
であるから、各ばねは伸びており、その伸びは

$$\frac{2}{\sqrt{3}}a - l,$$

となり、題意が示された。

RX の張力

x 軸を OP に沿ってとり、P の向きを正とする。X が O から P の向きに変位 x の位置にあるとする。このとき $OX = x$、$OR = c$、$\angle XOR = 180° - 60° = 120°$ である。



三角形 XOR に余弦定理を用いると、

$$RX^2 = c^2 + x^2 - 2cx\cos 120° = c^2 + cx + x^2 = \frac{4a^2}{3} + \frac{2ax}{\sqrt{3}} + x^2.$$

よってフックの法則により、RX の張力は

$$T = \frac{\lambda}{l}\left(\sqrt{\frac{4a^2}{3} + \frac{2ax}{\sqrt{3}} + x^2} - l\right),$$

となり、題意が示された。軸 OP に関する対称性から $QX = RX$ であるので、QX も同じ張力 T をもつ。

運動方程式

$r = RX$ とおく。ばね PX の長さは $c - x$ であるから、その張力は $T_P = \frac{\lambda}{l}(c - x - l)$ であり、P の向き（$+x$ の向き）にはたらく。

点 R の x 座標は $-c\cos 60^\circ = -\frac{c}{2}$ であるから、X から R への変位の x 成分は $-\left(x+\frac{c}{2}\right)$ である。したがって XR に沿った力 T の x 成分は $-T\dfrac{x+c/2}{r}$ である。QX による力も同じ x 成分をもち、二つの垂直成分は対称性により打ち消し合う。よって直線 OP を横切る向きの力ははたらかず、X はこの直線に沿って運動する。

考えてみよう この平方根から、どうすれば線形の方程式が得られるだろうか。

まず厳密な力を書き、それから x が小さいとして展開する。OP に沿って力を分解すると、

$$m\ddot{x} = T_P - 2T\frac{x+c/2}{r} = \frac{\lambda}{l}\left[(c-x-l)-(2x+c)\left(1-\frac{l}{r}\right)\right]$$
$$= \frac{\lambda}{l}\left[-3x-l+\frac{l(2x+c)}{r}\right].$$

この式は厳密である。ここで $r^2 = c^2\left(1+\frac{x}{c}+\frac{x^2}{c^2}\right)$ である。二項展開（binomial expansion）を用い、x^2 以上の項を落とすと、

$$\frac{1}{r} \approx \frac{1}{c}\left(1-\frac{x}{2c}\right), \qquad \frac{2x+c}{r} \approx \left(1+\frac{2x}{c}\right)\left(1-\frac{x}{2c}\right) \approx 1+\frac{3x}{2c}.$$

これを代入すると、

$$m\ddot{x} \approx \frac{\lambda}{l}\left[-3x-l+l+\frac{3lx}{2c}\right] = -\frac{3\lambda}{l}\left(1-\frac{l}{2c}\right)x.$$

$\frac{l}{2c} = \frac{\sqrt{3}l}{4a}$ であるから、

$$\ddot{x} \approx -\omega^2 x, \qquad \omega^2 = \frac{3\lambda(4a-\sqrt{3}l)}{4mla}.$$

$\sqrt{3}l < 2a < 4a$ であるから、この ω^2 は正である。よって力は復元力であり、x が小さいとき粒子は O を中心とする近似的な単振動（simple harmonic motion）を行い、その周期は

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{4mla}{3(4a-\sqrt{3}l)\lambda}},$$

となり、題意が示された。

検算

- $x=0$ のとき厳密な力は $\frac{\lambda}{l}\left[-l+\frac{lc}{c}\right]=0$ であり、最初に求めた平衡と一致する。
- 単位：λ は力、l と a は長さであるから、$\frac{mla}{a\lambda}$ の単位は $\mathrm{kg\,m/N} = \mathrm{s}^2$ となり、周期は時間の次元をもつ。

- ω^2 を求める別の方法。小さな変位に対して、一つのばねは伸びによって剛性（stiffness）$\frac{\lambda}{l}\cos^2\phi$ を、向きの回転によって剛性 $\frac{T_0}{c}\sin^2\phi$ を与える。ここで ϕ はばねが OP となす角であり、$T_0 = \frac{\lambda}{l}(c-l)$ は平衡時の張力である。$\phi = 0°, 60°, 60°$ とすると、全体の剛性は $\frac{3}{2}\cdot\frac{\lambda}{l} + \frac{3}{2}\cdot\frac{T_0}{c} = \frac{3\lambda}{l}\left(1-\frac{l}{2c}\right)$ となり、先の結果と一致する。
- $a = \lambda = m = 1$、$l = 0.8$ とすると、公式から周期はおよそ 2.838 となる。P の向きへの小さな変位から始めて、2 次元の運動全体をコンピュータでシミュレーションすると、有効数字 4 桁まで同じ値が得られる。

よくある間違い

- $\cos 120° = +\frac{1}{2}$ としてしまう、あるいは余弦定理で誤った角を用いる。こうすると平方根の中が $-\frac{2ax}{\sqrt{3}}$ になってしまう。
- QX と RX の張力を一定として扱う。張力の**向き**の変化と**大きさ**の変化は、どちらも x について 1 次の項に寄与する。
- 中心から頂点までの距離を求める際に、三角形の一辺を $2a$ ではなく a としてしまう。

STEP のその先へ

安定な平衡の近くでは、力は変位についてほぼ線形である。ここでの復元力は弾性ポテンシャルエネルギー（elastic potential energy）の勾配（gradient）であり、$m\omega^2$ はその 2 階導関数（second derivative）である。2 次元では、この 2 階導関数は 2×2 行列（ヘッセ行列（Hessian））となり、その固有ベクトル（eigenvector）が微小振動の**基準振動**（normal modes）である。3 回対称性により、この系は OP に沿った方向だけでなく、O のまわりのどの方向にも同じ周期で振動する。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、微小振動と連成系（coupled systems）を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。