解答例

STEP III 2016、第 8 問

純粋数学 • 関数方程式

> **STEP III 2016、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q8

鍵となる考え方

それぞれの方程式は、未知の関数の x における値を、変換を施した別の点における値と結びつけている。その変換をもう一度（あるいは三度）施すと x に戻るならば、変換後の点を方程式に代入することで、同じ未知数についての**第二の**方程式が得られる。こうして連立一次方程式（simultaneous linear equations）が得られるので、通常の未知数の場合とまったく同様に、不要な値を消去することができる。

解答

小問 (i)

この方程式は**すべての** x について成り立つので、x を $-x$ に置き換えても成り立つ：

$$\mathrm{f}(-x) + (1+x)\,\mathrm{f}(x) = (-x)^2 = x^2,$$

これが示すべき結果である。

これで、2 つの未知数 $\mathrm{f}(x)$ と $\mathrm{f}(-x)$ についての 2 つの方程式が得られた。第二の式から $\mathrm{f}(-x) = x^2 - (1+x)\mathrm{f}(x)$ となり、これをもとの方程式に代入すると

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x) + (1-x)(x^2 - (1+x)\mathrm{f}(x)) &= x^2 \\ \mathrm{f}(x)(1 - (1-x^2)) &= x^2 - (1-x)x^2 \\ x^2\,\mathrm{f}(x) &= x^3. \end{aligned}$$

$x \neq 0$ のときは x^2 で割って $\mathrm{f}(x) = x$ を得る。$x = 0$ のときは、もとの方程式は

$f(0)+f(0)=0$ となるので、やはり $f(0)=0$ である。したがって

$$f(x)=x \quad \text{すべての} x.$$

確認：$x+(1-x)(-x)=x-x+x^2=x^2$ となり、確かに成り立つ。

> **考えてみよう** なぜ問題文は答えの確認を求めているのだろうか。

上の議論が示しているのは、ある関数がこの方程式を満たす**ならば**それは $f(x)=x$ でなければならない、ということだけである。そのような関数が存在することまでは示していない。式変形の途中で情報が失われている可能性があり、その場合にはどの関数も条件を満たさないことになる。代入して確かめることで、この隙間が埋まるのである。

小問 (ii)

まず、$x\neq 1$ であるすべての x について $K(x)\neq 1$ であることに注意する。$\frac{x+1}{x-1}=1$ となるには $x+1=x-1$ が必要だからである。よって $K(K(x))$ は定義され、分母と分子に $x-1$ を掛けると

$$K(K(x))=\frac{\dfrac{x+1}{x-1}+1}{\dfrac{x+1}{x-1}-1}=\frac{(x+1)+(x-1)}{(x+1)-(x-1)}=\frac{2x}{2}=x.$$

g についての方程式は $g(x)+x\,g(K(x))=x$ である。$K(x)\neq 1$ なので x を $K(x)$ に置き換えてよく、$K(K(x))=x$ であるから

$$g(K(x))+K(x)\,g(x)=K(x).$$

$K(x)$ を K と書く。すると $g(K)=K-K\,g(x)$ であり、これをもとの方程式に代入すると

$$g(x)+x(K-K\,g(x))=x \quad\Longrightarrow\quad (1-xK)\,g(x)=x-xK.$$

ここで

$$1-xK=\frac{(x-1)-x(x+1)}{x-1}=-\frac{x^2+1}{x-1},$$
$$x-xK=x\cdot\frac{(x-1)-(x+1)}{x-1}=-\frac{2x}{x-1}.$$

$x^2+1>0$ なので因数 $1-xK$ は決して 0 にならず、割り算ができる：

$$g(x)=\frac{-2x/(x-1)}{-(x^2+1)/(x-1)}=\frac{2x}{x^2+1}\qquad (x\neq 1),$$

これが示すべき結果である。（この関数が実際に方程式を満たすことは確かめられる。たとえば $x=2$ のとき、$K(2)=3$ であり $\frac{4}{5}+2\cdot\frac{6}{10}=2$ となる。）

小問 (iii)

$\mathrm{M}(x) = \dfrac{1}{1-x}$ とおく。方程式は

$$\mathrm{h}(x) + \mathrm{h}(\mathrm{M}(x)) = 1 - x - \mathrm{M}(x),$$

となり、右辺が x と $\mathrm{M}(x)$ だけで書かれているのは心強い。

今度は M は自分自身の逆関数（inverse）ではないので、繰り返し施した結果を調べる。$x \neq 0, 1$ のとき

$$\mathrm{M}(\mathrm{M}(x)) = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{-x} = \frac{x-1}{x}, \qquad \mathrm{M}(\mathrm{M}(\mathrm{M}(x))) = \frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} = \frac{x}{1} = x.$$

よって M は周期（period）3 をもつ。また、M によって定義域（domain）の外に出ないことも必要である。$\mathrm{M}(x)$ は決して 0 にならず、$\mathrm{M}(x) = 1$ となるのは $x = 0$ のときに限るので、$x \neq 0, 1$ ならば $\mathrm{M}(x) \neq 0, 1$ でもある。

> **考えてみよう** M を 2 回施しても x には戻らない。どうすれば十分な数の方程式が得られるだろうか。

サイクルの 3 点すべてを使う。$a = x$、$b = \mathrm{M}(x)$、$c = \mathrm{M}(b) = \frac{x-1}{x}$ とおくと、$\mathrm{M}(c) = a$ である。方程式を a、b、c において順に適用すると

$$\begin{aligned} \mathrm{h}(a) + \mathrm{h}(b) &= 1 - a - b, \\ \mathrm{h}(b) + \mathrm{h}(c) &= 1 - b - c, \\ \mathrm{h}(c) + \mathrm{h}(a) &= 1 - c - a. \end{aligned}$$

3 式をすべて加えて 2 で割ると

$$\mathrm{h}(a) + \mathrm{h}(b) + \mathrm{h}(c) = \tfrac{3}{2} - (a + b + c).$$

ここから第二の式を引くと

$$\mathrm{h}(a) = \tfrac{3}{2} - a - b - c - (1 - b - c) = \tfrac{1}{2} - a.$$

したがって

$$\mathrm{h}(x) = \tfrac{1}{2} - x \qquad (x \neq 0,\ x \neq 1).$$

確認：$(\frac{1}{2} - x) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{1-x}) = 1 - x - \frac{1}{1-x}$ となり、確かに成り立つ。

検算

▶ (i) で $x = 3$ とすると、$3 + (-2)(-3) = 9 = 3^2$ である。

- (ii) で $x = -1$ とすると、$\mathrm{K}(-1) = 0$ であり、$\mathrm{g}(-1) + (-1)\,\mathrm{g}(0) = -1 - 0 = -1$ となる。また $\mathrm{K}(0) = -1$ であり、周期が 2 であることも確かめられる。
- (iii) で $x = 2$ とすると、サイクルは $2 \to -1 \to \frac{1}{2} \to 2$ であり、$\mathrm{h}(2) + \mathrm{h}(-1) = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$、一方 $1 - 2 - (-1) = 0$ である。

3 つの関数はいずれも、コンピュータを用いて、2000 個のランダムな有理数の値において各方程式を厳密な演算で検証することでも確認した。

よくある間違い

- (i) で x^2 で割り、$x = 0$ の場合を忘れること。この場合には別途（1 行で済む）議論が必要である。
- $\mathrm{K}(x)$ や $\mathrm{M}(x)$ を x に代入する際に、それが方程式の成り立つ定義域の中にとどまることを確かめないこと。
- (iii) で 1 回だけ代入し、未知数が 3 つのまま行き詰まること。サイクル全体が必要である。

STEP のその先へ

写像 $x \mapsto -x$、K、M はいずれもメビウス変換（Möbius transformations）$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ であり、これらは合成（composition）に関して群（group）をなす。有限位数（finite order）の変換は有限巡回群（finite cyclic group）を生成し、ここでの方法はその群全体にわたって和をとる（あるいは消去する）ことである。これは群の表現論（group representation theory）で再び現れる考え方である。メビウス変換は 2×2 行列と対応しており、行列を 3 乗することで $\mathrm{M}^3 = $ 恒等写像 を求めることができる。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ビジュアル複素解析』）には、メビウス変換についての見事な解説がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。