解答例

STEP III 2016、第 7 問

純粋数学 • 1 の冪根

> **STEP III 2016、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q7

この問題は、*Beyond STEP* の第 5.4 節「**正多角形の中の距離**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch05/polygon-distances.html

鍵となる考え方

距離は絶対値（modulus）であり、絶対値の積は積の絶対値である。多角形を複素平面（Argand diagram）上に置き、頂点が回転した 1 の n 乗根（roots of unity）になるようにすれば、冒頭の恒等式（identity）により、距離の積は適当な w に対する $|w^n - 1|$ となる。本当に工夫が必要なのは座標の選び方だけである。O を原点に置き、X_0X_1 の垂直二等分線（perpendicular bisector）を実軸にすれば、P は実数になる。

解答

因数分解

$k = 0, 1, \ldots, n-1$ に対して $(\omega^k)^n = \mathrm{e}^{2\pi i k} = 1$ であるから、各 ω^k は $z^n - 1$ の根である。これら n 個の数は相異なる。実際、それらの偏角（argument）$2\pi k/n$ は $[0, 2\pi)$ 内の相異なる数である。恒等式の両辺はともに n 次のモニック多項式（monic polynomial）であるから、その差

$$D(z) = (z-1)(z-\omega)\cdots(z-\omega^{n-1}) - (z^n - 1)$$

の次数（degree）は高々 $n-1$ である。ところが D は n 個の相異なる点 $1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}$ で 0 となり、次数が高々 $n-1$ の 0 でない多項式の根は高々 $n-1$ 個である。したがっ

て $D \equiv 0$ であり、

$$\prod_{k=0}^{n-1}(z-\omega^k) = z^n - 1 \quad \text{任意の複素数} z.$$

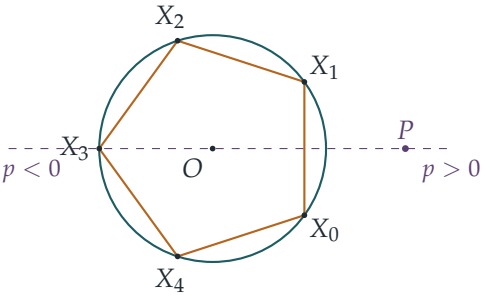
が成り立つ。

小問 (i)

頂点は円周上に順に番号が付けられているものとする。したがって X_0 と X_1 は隣り合い、$\angle X_0OX_1 = 2\pi/n$ である。図形を回転や鏡映で動かしても距離は変わらないから、O を原点に置いて

$$X_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k-1)\pi/n} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/n}\,\omega^k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

としてよい。このとき $X_0 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/n}$ と $X_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n}$ は実軸に関して互いに対称であるから、X_0X_1 の垂直二等分線は実軸である。X_0 と X_1 から等距離にある点はちょうどこの直線上の点であるから、P は実数 p であり、$|OP| = |p|$ である。X_0X_1 の中点（midpoint）は $\cos(\pi/n) > 0$ であるから、$p > 0$ は P が O から見て辺 X_0X_1 と同じ側にあることを意味する。



（図は $n = 5$ の場合である。n が奇数のとき、O を通るこの直線は反対側の頂点も通る。）

さて、$|ab| = |a||b|$ と $|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/n}| = 1$ を用いると、

$$\begin{aligned}|PX_0|\,|PX_1|\cdots|PX_{n-1}| &= \prod_{k=0}^{n-1}|p - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/n}\omega^k| = \prod_{k=0}^{n-1}|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/n}|\,|p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n} - \omega^k| \\ &= \left|\prod_{k=0}^{n-1}(p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n} - \omega^k)\right| = \left|(p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n})^n - 1\right|,\end{aligned}$$

となる。最後の等号は $z = p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n}$ として因数分解（factorisation）を用いた。$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$ であるから、

$$|PX_0|\,|PX_1|\cdots|PX_{n-1}| = |-p^n - 1| = |p^n + 1|.$$

考えてみよう p の符号が、n が奇数のときには効いてくるのに、n が偶数のときには効いてこないのはなぜか？

n が偶数ならば、p の符号によらず $p^n = |p|^n \geq 0$ であるから $|p^n + 1| = |p|^n + 1$ となり、

$$|PX_0| \times |PX_1| \times \cdots \times |PX_{n-1}| = |OP|^n + 1,$$

が示された。n が奇数ならば、p^n は p と同じ符号をもち、次の二つの場合がある。

- P が O から X_0X_1 の中点へ向かう半直線（ray）上にある場合（$p \geq 0$）、$p^n = |OP|^n$ であり、積は $|OP|^n + 1$ である。
- P が反対向きの半直線上にある場合（$p < 0$）、これは n が奇数のとき O から頂点 $X_{(n+1)/2}$（$e^{i\pi} = -1$ の位置にある）へ向かう半直線であり、$p^n = -|OP|^n$ となって、積は

  $$\big||OP|^n - 1\big|.$$

  である。

二つ目の場合には絶対値記号が重要である。P が円の内部にあるとき値は $1 - |OP|^n$ であり、$P = X_{(n+1)/2}$ のとき値は 0 となる。このとき距離の一つが 0 になるのだから、そうでなければならない。

小問 (ii)

今度は $X_k = \omega^k$ となるように回転させる。すると $X_0 = 1$ である。$z \neq 1$ に対して、因数分解から

$$(z-\omega)(z-\omega^2)\cdots(z-\omega^{n-1}) = \frac{z^n - 1}{z - 1} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}.$$

が得られる。左端と右端はともに多項式であり、無限個の点（$z \neq 1$ であるすべての点）で一致するから、$z = 1$ も含めたすべての z で等しい。$z = 1$ を代入すると

$$(1-\omega)(1-\omega^2)\cdots(1-\omega^{n-1}) = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n} = n.$$

となる。絶対値をとり、$|1 - \omega^k| = |X_0X_k|$ を用いると、

$$|X_0X_1| \times |X_0X_2| \times \cdots \times |X_0X_{n-1}| = n,$$

となり、これが求める結果である。

検算

- 正方形（$n = 4$）で $P = O$ の場合：どの距離も 1 であるから、積は $1 = 0^4 + 1$ である。P が非常に遠くにあるときは、公式のとおり積は $|OP|^n$ のように振る舞う。
- 正三角形（$n = 3$）で、P が反対側の O から距離 2 の位置にある場合：距離は 1（-1 にある反対側の頂点まで）と $\sqrt{(-2 - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \sqrt{7}$（二つ）であり、積は $7 = 2^3 - 1$ となる。
- 正方形に対する小問 (ii)：$|X_0X_1|\,|X_0X_2|\,|X_0X_3| = \sqrt{2} \times 2 \times \sqrt{2} = 4$。三つの結果はいずれも、ランダムな n、回転、P の位置についてコンピュータでも確認した。

よくある間違い

- 小問 (i) で X_0 を 1 に置いてしまうこと：このとき X_0X_1 の垂直二等分線は実軸ではなく角 π/n の直線となり、計算が煩雑になる。座標は P に合わせて選ぶこと。
- n が奇数で P が反対側にある場合に絶対値を忘れること：P が円の内部にあるとき $|OP|^n - 1$ は負である。
- $\dfrac{z^n - 1}{z - 1}$ にそのまま $z = 1$ を代入してしまうこと。値が n であることを正当化するのは多項式の恒等式である。

STEP のその先へ

小問 (ii) は、$z^n - 1$ の $z = 1$ における微分係数が n であるという主張にほかならない。一般に、$f(z) = \prod(z - a_k)$ ならば $f'(a_0) = \prod_{k \neq 0}(a_0 - a_k)$ である。このような 1 の冪根にわたる積は、円分多項式（cyclotomic polynomials）の理論や判別式（discriminants）の計算に現れる。また小問 (i) は本質的に、正多角形の対称軸上の点からの距離に関するコーツ（Roger Cotes）の古典的な結果である。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、こうした複素数の掛け算の幾何学が展開されていく様子を見るのにうってつけの美しい本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。