解答例

STEP III 2016、第 6 問

純粋数学 ・ 双曲線関数

STEP III 2016、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/16-s3-q6

鍵となる考え方

$\operatorname{sech} x = a\tanh x + b$ の両辺に $\cosh x$ を掛けると $a\sinh x + b\cosh x = 1$ となり、これはまさに最初の小問で扱う組合せである。したがって最初の仕事は、おなじみの「$R\cos(x+\alpha)$」の技法の双曲線関数（hyperbolic function）版である。三角関数の場合とは異なり、得られる形は B と $\pm A$ の大小関係によって変わり、それぞれの形から解の個数がただちにわかる。

解答

$A\sinh x + B\cosh x$ の形

展開すると

$$R\cosh(x+\gamma) = R\sinh\gamma\,\sinh x + R\cosh\gamma\,\cosh x,$$

であるから、$R\sinh\gamma = A$ かつ $R\cosh\gamma = B$ となればよい。$\cosh^2\gamma - \sinh^2\gamma = 1$ であるから、このとき必ず $R^2 = B^2 - A^2$ かつ $\tanh\gamma = A/B$ となる。$B > A > 0$ のときはこの両方を満たすことができる。すなわち

$$R = \sqrt{B^2 - A^2} > 0, \qquad \gamma = \operatorname{artanh}\frac{A}{B},$$

とおけばよく、$0 < A/B < 1$ であるからこれは存在する。このとき $\cosh\gamma = 1/\sqrt{1 - A^2/B^2} = B/R$ かつ $\sinh\gamma = \tanh\gamma\cosh\gamma = A/R$ であるから、求めるとおり $R\cosh\gamma = B$ かつ $R\sinh\gamma = A$ となる。よって $A\sinh x + B\cosh x = R\cosh(x+\gamma)$ である。

$A > 0$ のもとでの残りの場合は次のとおりである。

- $-A < B < A$：代わりに $R\sinh(x+\gamma) = R\cosh\gamma\sinh x + R\sinh\gamma\cosh x$ と係数を比較すると

$$A\sinh x + B\cosh x = \sqrt{A^2 - B^2}\,\sinh(x+\gamma), \qquad \gamma = \operatorname{artanh}\frac{B}{A}.$$

- $B = A$：$A(\sinh x + \cosh x) = Ae^x$。
- $B = -A$：$A(\sinh x - \cosh x) = -Ae^{-x}$。
- $B < -A$：最初の結果を $-A\sinh x - B\cosh x$ に適用すると（$-B > A$ かつ $-A < 0$ である。上の計算で必要だったのは $|A| < B$ だけである）

$$A\sinh x + B\cosh x = -\sqrt{B^2 - A^2}\,\cosh(x+\gamma), \qquad \gamma = \operatorname{artanh}\frac{A}{B}.$$

交点の方程式

$\cosh x > 0$ であるから、2曲線が交わるのは

$$\operatorname{sech} x = a\tanh x + b \iff 1 = a\sinh x + b\cosh x. \qquad (*)$$

となる点である。

小問 (i)

$b > a > 0$ のとき $R = \sqrt{b^2 - a^2}$ とおくと、$(*)$ は

$$\cosh\left(x + \operatorname{artanh}\tfrac{a}{b}\right) = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}}.$$

となる。2曲線が交わるならこの方程式は解をもつので、右辺は1以上である。$c \geq 1$ のとき $\cosh u = c$ の解は $u = \pm\operatorname{arcosh} c$ であるから

$$x = \pm\operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}}\right) - \operatorname{artanh}\frac{a}{b},$$

となり、これが求める形である。

小問 (ii)

$a > b > 0$ のときは sinh の場合にあたり、$(*)$ は $\sqrt{a^2 - b^2}\,\sinh\left(x + \operatorname{artanh}\frac{b}{a}\right) = 1$ となる。sinh は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への全単射（bijection）であるから、交点はつねにちょうど1個あり、それは

$$x = \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right) - \operatorname{artanh}\frac{b}{a}.$$

である。

小問 (iii)

最初の小問の各場合について（$A = a > 0$、$B = b$ として）$(*)$ の解の個数を数える。

- $b < -a$：左辺 $-\sqrt{b^2 - a^2}\cosh(x + \gamma)$ は負であるから、解はない。
- $b = -a$：$-a\mathrm{e}^{-x} = 1$ は解をもたない。
- $-a < b < a$：(ii) と同様にちょうど 1 個の解をもつ。(ii) の議論はこの範囲のどの b に対しても成り立つ。
- $b = a$：$a\mathrm{e}^{x} = 1$ はただ 1 つの解 $x = -\ln a$ をもつ。
- $b > a$：$\cosh(x + \gamma) = 1/\sqrt{b^2 - a^2}$ は、$1/\sqrt{b^2 - a^2} > 1$ ならば 2 個、1 に等しければ 1 個、1 より小さければ 0 個の解をもつ。

> **考えてみよう** $b \leq a$ の場合に交点が 2 個になることが決してないのはなぜか？

これらの場合、$(*)$ の左辺は x の狭義単調（strictly monotonic）な関数（$\sinh(x + \gamma)$ または $\mathrm{e}^{\pm x}$ の定数倍）であるか、つねに負であるかのいずれかなので、値 1 をとるのは高々 1 回である。いったん減少してから再び増加する cosh の形だけが、1 に 2 回到達できる。

したがって、2 曲線が相異なる 2 点で交わるための必要十分条件は $b > a$ かつ $b^2 - a^2 < 1$、すなわち

$$a < b < \sqrt{a^2 + 1}.$$

である。

小問 (iv)

$\operatorname{sech} x - (a\tanh x + b) = \operatorname{sech} x\left(1 - a\sinh x - b\cosh x\right)$ かつ $\operatorname{sech} x \neq 0$ であるから、2 曲線が接する（touch）のは、$g(x) = a\sinh x + b\cosh x - 1$ が重複した零点（repeated zero）をもつ点、すなわち $g(x) = g'(x) = 0$ となる点にほかならない。sinh の場合と指数関数の場合には、$g'(x)$ は $\cosh(x + \gamma)$ または e^{x} の定数倍であって決して 0 にならないので、重複した零点はない。$b > a$ の場合は $g(x) = R\cosh(x + \gamma) - 1$、$g'(x) = R\sinh(x + \gamma)$ であり、これらが同時に 0 になるのは $x + \gamma = 0$ かつ $R = 1$ のときに限る。よって 2 曲線が接するための必要十分条件は

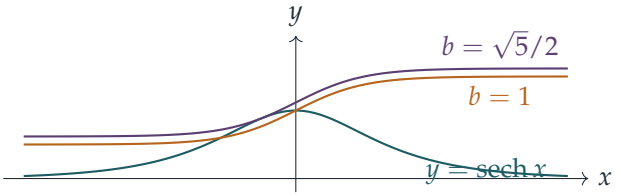
$$b > a \quad \text{かつ} \quad b^2 - a^2 = 1, \qquad \text{すなわち} \quad b = \sqrt{1 + a^2}.$$

である。接点は $x = -\gamma = -\operatorname{artanh}(a/b)$ であるから、$\operatorname{sech}^2 u = 1 - \tanh^2 u$ と $\operatorname{sech} u > 0$ を用いて

$$y = \operatorname{sech}\left(\operatorname{artanh}\tfrac{a}{b}\right) = \sqrt{1 - \tfrac{a^2}{b^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} = \frac{1}{b} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}},$$

となる。検算として、もう一方の曲線からも $y = -a \cdot \frac{a}{b} + b = \frac{b^2 - a^2}{b} = \frac{1}{b}$ が得られる。

下の図は $a = \frac{1}{2}$ の場合を示している。$b = 1$（琥珀色）では交点が 2 個あり、$b = \sqrt{5}/2$（紫）では 2 曲線が高さ $2/\sqrt{5}$ で接する。



検算

$a = \frac{3}{4}$、$b = 1$ とすると $b^2 - a^2 = \frac{7}{16} < 1$ であり、(iii) によれば交点は 2 個である。このとき $\operatorname{arcosh}(4/\sqrt{7}) = \ln\left((4+3)/\sqrt{7}\right) = \ln\sqrt{7}$ かつ $\operatorname{artanh}\frac{3}{4} = \frac{1}{2}\ln 7 = \ln\sqrt{7}$ であるから、(i) の公式から $x = 0$ と $x = -\ln 7 \approx -1.946$ が得られる。$x = 0$ では、当然そうなるべきとおり、両曲線とも $(0, 1)$ を通る。また、多数の無作為な a、b について $(*)$ をコンピュータで調べたところ、すべての場合で解の個数が確認され、接する条件のもとで重解（double root）が得られることも確かめられた。

よくある間違い

- 境界の場合 $b = \pm a$ を忘れること。この場合は cosh の形も sinh の形も存在せず、式は単一の指数関数になる。
- (iii) で $b^2 - a^2 < 1$ だけを答え、$b > a$ を書き落とすこと。$b < a$ でも 2 曲線は交わるが、交点は 1 個だけである。
- γ の符号を誤ること。解は $\pm\operatorname{arcosh}(\cdot)$ から $\operatorname{artanh}(a/b)$ を引いたものである。

STEP のその先へ

場合分けを支配しているのは $B^2 - A^2$ の符号である。点 (A, B) は、直線 $B = \pm A$ で区切られた領域のいずれかの内部にあるか、これらの直線上にある。これは特殊相対

性理論（special relativity）の幾何そのものである。そこではローレンツ・ブースト（Lorentz boost）が双曲的な「回転」であり、通常の回転が $x^2 + y^2$ を保つのとまったく同様に $t^2 - x^2$ を保つ。そして $B = \pm A$ は光円錐（light cone）の役割を果たし、ブーストによって決して越えることのできない唯一の境界となる。双曲線関数とこの種の問題についてさらに知りたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（上級数学問題集）を参照せよ。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。