解答例

STEP III 2016、第 4 問

純粋数学 • 望遠鏡型級数

STEP III 2016、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/16-s3-q4

鍵となる考え方

問題で示唆されている二つの分数の差は一般項の定数倍になっていることがわかるので、和は望遠鏡和（telescoping sum）となる。すなわち、ほとんどすべての項が打ち消し合い、最初と最後の部分だけが残る。小問 (ii) では、sech を指数関数（exponential）で表して因数をくくり出すと、各項は $x = \mathrm{e}^{-2y}$ とした小問 (i) の項とまったく同じ形になる。さらに、sech は偶関数（even function）であるから、両側無限和（doubly infinite sum）は片側の和に帰着される。

解答

小問 (i)

示唆された差を通分（common denominator）すると、

$$\frac{1}{1+x^r} - \frac{1}{1+x^{r+1}} = \frac{x^{r+1}-x^r}{(1+x^r)(1+x^{r+1})} = (x-1)\,\frac{x^r}{(1+x^r)(1+x^{r+1})}.$$

$|x| \neq 1$ より $x \neq 1$ であるから、$x-1$ で割ってよい。（この条件から $x \neq -1$ も保証されるので、分母 $1+x^r$ が 0 になることはない。$x^r = -1$ ならば $|x| = 1$ となってしまうからである。）したがって

$$\frac{x^r}{(1+x^r)(1+x^{r+1})} = \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{1+x^r} - \frac{1}{1+x^{r+1}}\right).$$

$r = 1$ から N まで和をとると、各括弧の第 2 の分数が次の括弧の第 1 の分数と打ち消し合い、

$$\sum_{r=1}^{N} \frac{x^r}{(1+x^r)(1+x^{r+1})} = \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x^{N+1}}\right)$$
$$= \frac{x\,(x^N-1)}{(x-1)(1+x)(1+x^{N+1})},$$

が残る。ここで 2 番目の形は二つの分数をまとめることで得られる。分子は $x^{N+1} - x = x(x^N - 1)$ である。

次に $|x| < 1$ と仮定する。すると $N \to \infty$ のとき $x^{N+1} \to 0$ であるから、部分和（partial sum）は

$$\frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{1+x} - 1\right) = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{-x}{1+x} = \frac{x}{1-x^2},$$

に収束（converge）する。これが求める無限和の値である。

小問 (ii)

任意の実数 t に対して

$$\operatorname{sech} t = \frac{2}{e^t + e^{-t}} = \frac{2e^{-t}}{1+e^{-2t}}.$$

$x = e^{-2y}$ とおく。$y > 0$ より $0 < x < 1$ である。このとき $\operatorname{sech}(ry) = 2e^{-ry}/(1+x^r)$ であり、

$$\operatorname{sech}(ry)\operatorname{sech}((r+1)y) = \frac{4\,e^{-(2r+1)y}}{(1+x^r)(1+x^{r+1})} = 4e^{-y}\,\frac{x^r}{(1+x^r)(1+x^{r+1})},$$

となる。$e^{-2ry} = x^r$ だからである。

考えてみよう なぜ $e^{-(2r+1)y}$ を $e^{-y} \cdot e^{-2ry}$ と分けるのか？

分子を、分母に現れるのと同じ x のべき x^r にしたいからである。そうすれば小問 (i) を項ごとに適用できる。残りの因数 e^{-y} は r によらないので、和の外に出せる。

$|x| < 1$ であるから、小問 (i) より

$$\sum_{r=1}^{\infty} \operatorname{sech}(ry)\operatorname{sech}((r+1)y) = 4e^{-y}\,\frac{x}{1-x^2} = \frac{4e^{-y}}{x^{-1}-x} = \frac{4e^{-y}}{e^{2y}-e^{-2y}} = \frac{4e^{-y}}{2\sinh 2y},$$

となり、これは $2e^{-y}\operatorname{cosech}(2y)$ に等しい。以上で示された。この和を S とおく。

両側無限和

すべての整数 r にわたる和を、$r \geq 1$、$r \in \{-1, 0\}$、$r \leq -2$ の三つの部分に分ける。

考えてみよう r が負の項はどのような形をしているか？

$r \le -2$ に対して $s = -r-1$ とおくと、$s \ge 1$ であり、$r+1 = -s$、$r = -(s+1)$ となる。sech は偶関数であるから

$$\operatorname{sech}(ry)\operatorname{sech}((r+1)y) = \operatorname{sech}((s+1)y)\operatorname{sech}(sy),$$

であり、r が $-2,-3,\ldots$ を動くとき、s は $1,2,\ldots$ を動く。よって $r \le -2$ の項の和も S である。（片側の和はどちらも収束するので、両側無限和をこのように分けることは正当である。）

中央の二つの項は

$$r=-1:\ \operatorname{sech}(-y)\operatorname{sech}0 = \operatorname{sech}y, \qquad r=0:\ \operatorname{sech}0\ \operatorname{sech}y = \operatorname{sech}y.$$

である。したがって、$\sinh 2y = 2\sinh y\cosh y$ を用いると

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty}\operatorname{sech}(ry)\operatorname{sech}((r+1)y) = 2S + 2\operatorname{sech}y = \frac{2\mathrm{e}^{-y}}{\sinh y\cosh y} + \frac{2\sinh y}{\sinh y\cosh y}$$
$$= \frac{2(\mathrm{e}^{-y}+\sinh y)}{\sinh y\cosh y}.$$

ところが $\mathrm{e}^{-y}+\sinh y = \mathrm{e}^{-y}+\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{y}-\mathrm{e}^{-y}) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{y}+\mathrm{e}^{-y}) = \cosh y$ であるから、$\cosh y$ が約分されて

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty}\operatorname{sech}(ry)\operatorname{sech}((r+1)y) = \frac{2}{\sinh y} = 2\operatorname{cosech}y.$$

検算

- $N=1$ のとき、有限和の公式は $\dfrac{x(x-1)}{(x-1)(1+x)(1+x^2)} = \dfrac{x}{(1+x)(1+x^2)}$ を与え、これは $r=1$ の項そのものである。
- $x=\frac{1}{2}$ のとき：無限和は $\frac{1/2}{3/4}=\frac{2}{3}$ となるはずであり、実際に部分和は 0.6667 に近づく。
- $y=1$ のとき：$2\mathrm{e}^{-1}\operatorname{cosech}2 \approx 0.202864$、$2\operatorname{cosech}1 \approx 1.701836$ であり、どちらも級数を直接足し合わせた値と小数点以下多くの桁まで一致する（多くの y の値についてコンピュータで確認済み）。
- $y \to \infty$ のとき、残るのは $r=-1,0$ の項だけで、それぞれ約 $2\mathrm{e}^{-y}$ であるから、合計は約 $4\mathrm{e}^{-y}$ となる。一方 $2\operatorname{cosech}y \approx 4\mathrm{e}^{-y}$ でもある。

よくある間違い

- 因数 $\frac{1}{x-1}$ を忘れる、あるいはその符号を誤る。差は項の $(x-1)$ 倍であり、$(1-x)$ 倍ではない。
- 両側無限和で S を 2 倍しただけで、$r=-1$ と $r=0$ の二つの項を忘れる。これらは $\operatorname{sech} 0 = 1$ を含み、どちらの片側の和にも含まれない。

STEP のその先へ

ここで無限和の項を並べ替えたり分割したりしてよいのは、すべての項が正である（級数が絶対収束（absolutely convergent）する）からである。条件収束（conditionally convergent）する級数については、リーマン（Riemann）の再配列定理（rearrangement theorem）により、項の順序を入れ替えると和を好きな値に変えられることが知られている。これは解析学（analysis）の最初の講義で出会う印象的な結果である。また、$\operatorname{sech}(ry)\operatorname{sech}((r+1)y)$ のような積をすべての整数にわたって足し合わせた和は、楕円関数（elliptic function）の理論にも現れ、そこではこのような両側級数（bilateral series）が美しい閉じた形で表される。級数の解析については、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を参照のこと。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。