解答例

STEP III 2016、第 3 問

純粋数学 ・ 積分と多項式

> **STEP III 2016、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q3

この問題は、*Beyond STEP* の第 4.6 節「**公式で表せない積分**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch04/no-formula.html

鍵となる考え方

$\int g(x)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \frac{P}{Q}\,\mathrm{e}^x + \text{定数}$ という形の等式は、導関数（derivative）についての主張にすぎない。したがって右辺を微分し、分母を払えばよい。こうすると問題は多項式（polynomial）の恒等式（identity）に帰着する。多項式の恒等式には二通りの攻め方がある。うまく選んだ値（ここでは $x=-1$）を代入する方法と、次数（degree）を比較する方法である。

解答

以下、$P(x), Q(x)$ を P, Q と書く。商の微分法（quotient rule）と積の微分法（product rule）により、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{P}{Q}\,\mathrm{e}^x\right) = \frac{PQ + P'Q - PQ'}{Q^2}\,\mathrm{e}^x.$$

よって積分の等式が成り立つのは、これが被積分関数に等しいとき（ただし Q は零多項式でない）であり、またそのときに限る。

小問 (i)

導関数を $\frac{x^3-2}{(x+1)^2}\,\mathrm{e}^x$ と等置し、$\mathrm{e}^x \neq 0$ で割って分母を払うと、多項式の恒等式

$$(x+1)^2\left(PQ + P'Q - PQ'\right) = (x^3-2)\,Q^2. \qquad (*)$$

を得る。

Q は因数 $x+1$ をもつ。 $(*)$ に $x=-1$ を代入する。左辺は 0 であり、右辺は $-3\,Q(-1)^2$ である。ゆえに $Q(-1)=0$ であり、因数定理（factor theorem）により $x+1$ は Q を割り切る。

次数。 P は零多項式ではない。そうでなければ導関数は 0 となり、被積分関数にならないからである。$\deg P = p$, $\deg Q = q$ とし、最高次の係数（leading coefficient）をそれぞれ $a \neq 0, b \neq 0$ とする。$PQ + P'Q - PQ'$ において、項 PQ は次数 $p+q$ で最高次の係数は ab である。一方、$P'Q$ と PQ' の次数はいずれも高々 $p+q-1$ である。よって $PQ + P'Q - PQ'$ の次数はちょうど $p+q$ であり、$(*)$ の左辺の次数は $p+q+2$ である。右辺の次数は $3+2q$ である。したがって

$$p+q+2 = 2q+3 \quad \Longrightarrow \quad p = q+1,$$

となり、P の次数は Q の次数よりちょうど一つ大きい。

$Q = x+1$ の場合。 このとき P の次数は 2 であり、$P = ax^2+bx+c$ とおく。$Q = x+1$, $Q' = 1$ より、$(*)$ は

$$(x+1)^2\big((x+1)P + (x+1)P' - P\big) = (x^3-2)(x+1)^2,$$

となり、$(x+1)^2$ で割ると

$$xP + (x+1)P' = x^3 - 2.$$

を得る。$xP = ax^3+bx^2+cx$ かつ $(x+1)P' = (x+1)(2ax+b) = 2ax^2 + (2a+b)x + b$ であるから、

$$ax^3 + (2a+b)x^2 + (2a+b+c)x + b = x^3 - 2.$$

係数を比較する。$a=1$ である。定数項から $b=-2$ を得る。このとき x^2 の項の条件 $2a+b=0$ は矛盾なく成り立つ。さらに x の項から $c = -(2a+b) = 0$ を得る。ゆえに

$$P(x) = x^2 - 2x, \qquad \int \frac{x^3-2}{(x+1)^2}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2-2x}{x+1}\,\mathrm{e}^x + \text{定数}.$$

小問 (ii)

背理法（proof by contradiction）で示す。共通因数をもたないそのような P と Q が存在すると仮定する。先と同様に、微分して分母を払うと

$$(x+1)\big(PQ + P'Q - PQ'\big) = Q^2. \qquad (**)$$

を得る。$x=-1$ を代入すると $Q(-1)^2 = 0$ となるので、$x+1$ は Q を割り切る。そこで

$$Q = (x+1)^n R, \qquad n \geq 1, \quad R(-1) \neq 0,$$

と書く。つまり n は Q に含まれる $x+1$ のちょうどの冪である。すると $Q' = n(x+1)^{n-1}R + (x+1)^n R'$ であり、

$$\begin{aligned} PQ + P'Q - PQ' &= (x+1)^n\big(PR + P'R - PR'\big) - n(x+1)^{n-1}PR \\ &= (x+1)^{n-1}\Big[(x+1)\big(PR + P'R - PR'\big) - nPR\Big]. \end{aligned}$$

これを $(**)$ に代入し、両辺から共通因数 $(x+1)^n$ を約す（右辺は $(x+1)^{2n}R^2$ である）と、

$$(x+1)\big(PR + P'R - PR'\big) - nPR = (x+1)^n R^2.$$

考えてみよう $(**)$ にもう一度 $x=-1$ を代入するだけで済ませず、わざわざ $x+1$ のちょうどの冪をくくり出すのはなぜだろうか。

$(**)$ に直接 $x=-1$ を代入しても、わかるのは $Q(-1)=0$ だけである。そうなるとすべての項が消えてしまい、P については何もわからない。Q から $x+1$ の因数をすべて取り除くと、$x=-1$ で自動的には消えない項 $-nPR$ が残るのである。

ここで $x=-1$ を代入する。$n \geq 1$ であるから右辺は 0 であり、左辺の第一項も同様に消える。ゆえに

$$-n\,P(-1)\,R(-1) = 0.$$

しかし $n \neq 0$ かつ $R(-1) \neq 0$ であるから、$P(-1)=0$ である。すると $x+1$ は Q だけでなく P の因数でもあり、両者が共通因数をもたないという仮定に矛盾する。よってそのような多項式は存在しない。 ■

（P, Q を互いに素（coprime）なものに限っても一般性は失われない。共通因数があれば、関数を変えることなく P/Q から約分できるからである。）

検算

- (i) の答えを直接微分する。$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^2-2x}{x+1}\right) = \frac{x^2+2x-2}{(x+1)^2}$ であり、これに $\frac{x^2-2x}{x+1} = \frac{x^3-x^2-2x}{(x+1)^2}$ を加えると $\frac{x^3-2}{(x+1)^2}$ となり、求める形になる。
- 数値的には $\int_0^1 \frac{x^3-2}{(x+1)^2}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \approx -1.359141$ であり、これは $\left[\frac{x^2-2x}{x+1}\mathrm{e}^x\right]_0^1 = -\frac{\mathrm{e}}{2}$ と一致する。
- (i) では次数の関係も合っている。P の次数は 2 であり、$Q = x+1$ の次数より一つ大きい。

よくある間違い

- $P'Q - PQ'$ は最高次の項が打ち消し合うため、次数が $p+q$ より小さいことを忘れる。次数を決めるのは PQ だけである。
- (ii) で $(**)$ に $x=-1$ を代入しただけで、$Q(-1)=0$ が得られたところで止まってしまう。矛盾を導くには、Q に含まれる $x+1$ のちょうどの冪が必要である。

STEP のその先へ

小問 (ii) は、$\int \frac{e^x}{x+1}\,dx$（本質的には指数積分（exponential integral）Ei）が、この制限された意味で「初等的（elementary）」でないことを述べている。そもそも積分が初等関数で表せるのはいつかを判定する完全な理論は、微分代数（differential algebra）におけるリウヴィル（Liouville）の定理とリッシュのアルゴリズム（Risch algorithm）である。ここでの議論はその小さな一例である。上で用いた多項式の代数（因数定理、整除性、互いに素であること）を丁寧に扱ったものとしては、Allenby, *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）を参照されたい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。