解答例

STEP III 2016、第 2 問

純粋数学 • 放物線の法線

> **STEP III 2016、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q2

鍵となる考え方

一般の点 $(at^2, 2at)$ における法線（normal）の方程式を書き、どの t の値に対して法線が P を通るかを考える。その条件は t についての 3 次方程式（cubic）となり、根の一つ $t = p$ は常に存在する（P における法線は P を通る）。この根を取り除くと 2 次方程式が残り、その 2 つの根がちょうど q と r である。以降の議論はすべて、根の和と積 $q + r$ と qr によって進む。

解答

小問 (i)

$x = at^2, y = 2at$ とおくと、$y^2 = 4ax$ 上で $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2a}{2at} = \dfrac{1}{t}$ となるので、パラメータ（parameter）t の点における法線の傾き（gradient）は $-t$ である。

$$y - 2at = -t\,(x - at^2), \qquad \text{すなわち} \qquad y + tx = 2at + at^3.$$

（この形は頂点 $t = 0$ の場合も含んでおり、そのとき法線は x 軸である。）

t における法線が $P(ap^2, 2ap)$ を通るための必要十分条件は

$$2ap + tap^2 = 2at + at^3.$$

である。$a > 0$ で割って整理すると、

$$\begin{aligned} 0 &= 2(p - t) + t(p^2 - t^2) \\ &= (p - t)(2 + t(p + t)) \\ &= (p - t)\,(t^2 + pt + 2). \end{aligned}$$

考えてみよう なぜ因数 $p-t$ を捨ててよいのか？

根 $t=p$ は自明なものである。P 自身における法線は P を通るからである。$Q\neq P$ と与えられているので $q\neq p$ であり、因数 $p-q$ は零ではない。よって

$$q^2+qp+2=0,$$

が成り立ち、これが示すべき式である。同じ議論により $r^2+rp+2=0$ も成り立つ。

小問 (ii)

したがって q と r はともに $t^2+pt+2=0$ の根である。$Q\neq R$ より $q\neq r$ なので、これらはこの方程式の **2つの**根であり、

$$q+r=-p,\qquad qr=2.$$

（特に判別式（discriminant）は正であり、$p^2>8$ である。また、$q=p$ となるには $2p^2+2=0$ が必要だがこれは不可能なので、Q と R は自動的に P とは異なる。）

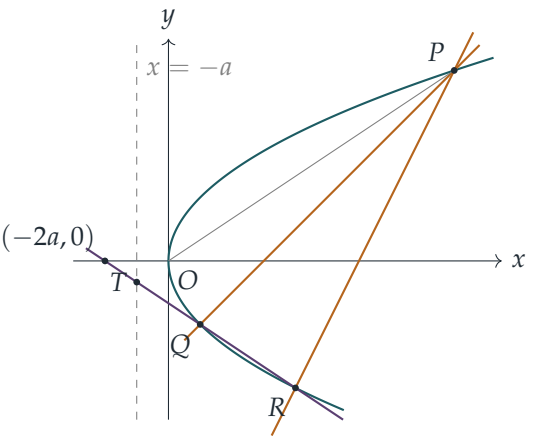
$(aq^2,2aq)$ と $(ar^2,2ar)$ を通る弦（chord）の傾きは $\dfrac{2a(q-r)}{a(q^2-r^2)}=\dfrac{2}{q+r}$ であり、その方程式は

$$(q+r)\,y=2x+2aqr.$$

である。（確認：Q において左辺は $2aq^2+2aqr$ となり、右辺に等しい。R においても同様である。）$q+r=-p$ と $qr=2$ を代入すると、

$$-p\,y=2x+4a.$$

p の値によらず、点 $(-2a,0)$ はこの方程式を満たす。よって QR は常に $(-2a,0)$ を通り、この点は P の選び方によらない。



図は $a=1, p=3$ の場合を示しており、このとき $q=-1, r=-2$ である。2 本の法線（琥珀色）は P で交わり、弦 QR（紫色）は $(-2,0)$ を通り、T は破線 $x=-1$ 上にある。

小問 (iii)

$p^2>8$ より $p\neq 0$ なので $P\neq O$ であり、直線 OP は $y=\dfrac{2ap}{ap^2}x=\dfrac{2}{p}x$、すなわち $x=\frac{1}{2}py$ である。（これは QR と平行ではない。QR の傾きは $-2/p$ だからである。）

$x=\frac{1}{2}py$ を QR の方程式に代入すると、

$$-py=py+4a \quad\Longrightarrow\quad y=-\frac{2a}{p}, \qquad x=\tfrac{1}{2}p\Big(-\frac{2a}{p}\Big)=-a.$$

よって $T=(-a,-\frac{2a}{p})$ であり、これは P の選び方によらず常に直線 $x=-a$（放物線の準線（directrix））上にある。

x 軸から T までの距離は $\dfrac{2a}{|p|}$ である。小問 (ii) より、P を通る相異なる 2 本の法線が存在することから $p^2>8$、すなわち $|p|>2\sqrt{2}$ が従う。$a>0$ なので

$$\frac{2a}{|p|}<\frac{2a}{2\sqrt{2}}=\frac{a}{\sqrt{2}},$$

となり、証明が完了する。$p^2=8$ ならば $q=r$ となってしまうので、この不等式は狭義（strict）である。

検算

- 図の場合 $a=1, p=3$ では、t^2+3t+2 の根は -1 と -2 である。法線 $y=x-3$ と $y=2x-12$ はともに $P(9,6)$ を通る。$(1,-2)$ と $(4,-4)$ を通る弦は $-3y=2x+4$ であり、これは $(-2,0)$ を通る。そして $T=(-1,-\frac{2}{3})$ であり、$\frac{2}{3}<\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0.707$ である。
- $|p|\to 2\sqrt{2}$ と上から近づけると、Q と R は一致し、T の高さは $a/\sqrt{2}$ に近づくので、この評価は最良（sharp）である。a と p を無作為に 20,000 通り選んでコンピュータで確認したところ、すべての結果が確かめられ、T の高さは $a/\sqrt{2}$ の 0.9996 倍に達したが、それを超えることはなかった。

よくある間違い

- $p-q$ で割ることの正当化を忘れる。それを可能にしているのは条件 $Q\neq P$ である。
- $q\neq r$ を用いて、q と r が同じ 2 次方程式の**両方の**根であると述べない。これこそが $q+r=-p$ と $qr=2$ を与えるのである。

- $p^2 > 8$ がどこから来るのかを述べずに最後の評価を証明する。それは 2 次方程式が相異なる 2 つの実数解をもつという条件から来ている。

STEP のその先へ

小問 (i) の背後にある t の 3 次方程式は、古典的な事実の特別な場合である。一般の点 (h,k) に対しては条件は $at^3 + (2a - h)\,t - k = 0$ となり、したがって平面上の 1 点からは放物線へ最大 3 本の法線が引ける。そして「法線が 1 本」と「法線が 3 本」の境界は**縮閉線**（evolute）と呼ばれる曲線である（ここでは半 3 次放物線（semicubical parabola））。縮閉線、包絡線、曲率は、曲線の微分幾何学の最初の講義で扱われる標準的な話題である。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、この座標幾何の流儀による STEP の問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。