解答例

STEP III 2016、第 13 問

確率・統計 ・ 和の尖度

STEP III 2016、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/16-s3-q13

鍵となる考え方

尖度（kurtosis）は平均（mean）からの偏差だけからつくられるので、確率変数を平行移動しても変わらない。このおかげで、すべての確率変数を 0 を中心とするように取り直し、通常のモーメント（moment）で計算することができる。正規分布（Normal distribution）の場合、4 次のモーメントは部分積分（integration by parts）によって求まる。その際、x の因数を 1 つ切り離して指数関数と組にするのである。平均が 0 の独立（independent）な確率変数の和については、T^4 を展開して期待値をとると、ある変数が 1 乗で現れる項はすべて消える。これが小問 (ii) のすべてであり、それがそのまま小問 (iii) につながる。

解答

平行移動. $W = X - a$ とおく。期待値の線形性（linearity of expectation）により $\mathrm{E}(W) = \mu - a$ であるから、

$$W - \mathrm{E}(W) = (X - a) - (\mu - a) = X - \mu.$$

W の平均からの偏差は、X の平均からの偏差とちょうど一致する。したがって W は同じ分散（variance）$\mathrm{E}((X-\mu)^2) = \sigma^2$、同じ 4 次の中心モーメント（fourth central moment）$\mathrm{E}((X-\mu)^4)$ をもち、よって同じ尖度をもつ。特に $a = \mu$ とすると、どの確率変数も、平均が 0 となるように中心化したもの $X - \mu$ と同じ尖度をもつ。

小問 (i)

$X \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$ とし、その確率密度関数（probability density）を

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/(2\sigma^2)}, \qquad \text{したがって} \qquad f'(x) = -\frac{x}{\sigma^2}\,f(x)$$

とする。$\mu = 0$ であるから、求めるべきものは $\mathrm{E}(X^4) = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ である。

> **考えてみよう** $\mathrm{e}^{-x^2/(2\sigma^2)}$ は初等関数で表せる原始関数（antiderivative）をもたないのに、$x^4\mathrm{e}^{-x^2/(2\sigma^2)}$ をどのように積分すればよいだろうか。

関数 $xf(x)$ は原始関数を**もつ**。すなわち $-\sigma^2 f(x)$ である。そこで $x^4 f(x) = x^3 \cdot xf(x)$ と書き、$u = x^3$、$\mathrm{d}v = xf(x)\,\mathrm{d}x$、$v = -\sigma^2 f(x)$ として部分積分すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[-\sigma^2 x^3 f(x)\Big]_{-\infty}^{\infty} + 3\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

$x \to \pm\infty$ のとき $x^3\mathrm{e}^{-x^2/(2\sigma^2)} \to 0$ となるので（指数関数はどんな累乗が増大するよりも速く減衰する）、境界項は消える。$u = x$ として同じ操作を行うと、

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[-\sigma^2 x f(x)\Big]_{-\infty}^{\infty} + \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sigma^2$$

を得る。ここで、f は確率密度関数なので積分すると 1 になることを用いた。（これにより分散が σ^2 であることも確かめられる。）よって $\mathrm{E}(X^4) = 3\sigma^2 \cdot \sigma^2 = 3\sigma^4$ であり、

$$\kappa = \frac{3\sigma^4}{\sigma^4} - 3 = 0.$$

平行移動の結果により、平均が何であっても、すべての正規分布の尖度は 0 である。

小問 (ii)

$T^4 = (Y_1 + \cdots + Y_n)^4$ を多項定理（multinomial theorem）によって展開する。各項は 4 つの因数 Y_r の積であり、4 つの因数が相異なる添字にどのように割り振られるかによって、項は次の 5 つの型に分けられる。

$$Y_r^4, \qquad 4\,Y_r^3 Y_s, \qquad 6\,Y_r^2 Y_s^2, \qquad 12\,Y_r^2 Y_s Y_t, \qquad 24\,Y_r Y_s Y_t Y_u,$$

ここで、異なる文字は異なる添字を表す。係数は並べ方の数を数えたものである。たとえば $Y_r^2 Y_s^2$ は、4 つの括弧のうちどの 2 つから Y_r をとるかを選ぶことで生じ、その方法は $\binom{4}{2} = 6$ 通りである。順序を考えない各組 $\{r, s\}$ は、$Y_r^2 Y_s^2$ 型の中にちょうど 1 回ずつ現れる。

次に期待値をとる。Y は互いに独立なので、異なる Y の累乗の積の期待値は、それぞれの期待値の積に等しい。$Y_r^3 Y_s$、$Y_r^2 Y_s Y_t$、$Y_r Y_s Y_t Y_u$ の型では、ある変数が 1 乗でしか

現れず、その因数 $\mathrm{E}(Y_s) = 0$ によって期待値全体が 0 になる。たとえば

$$\mathrm{E}(Y_r^3 Y_s) = \mathrm{E}(Y_r^3)\,\mathrm{E}(Y_s) = 0.$$

残るのは 1 番目と 3 番目の型だけであり、やはり独立性により、$r \neq s$ のとき $\mathrm{E}(Y_r^2 Y_s^2) = \mathrm{E}(Y_r^2)\,\mathrm{E}(Y_s^2)$ である。組を $r < s$ として列挙すると、

$$\mathrm{E}(T^4) = \sum_{r=1}^{n} \mathrm{E}(Y_r^4) + 6 \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{s=r+1}^{n} \mathrm{E}(Y_r^2)\,\mathrm{E}(Y_s^2)$$

となり、示すべき式が得られた。（この小問では独立性と平均が 0 であることを用いたが、Y が同一の分布に従うことは用いていない点に注意せよ。）

小問 (iii)

各 X_r の平均を μ、標準偏差（standard deviation）を σ とし、$S = X_1 + \cdots + X_n$ とおく。$Y_r = X_r - \mu$ とおく。Y_r は平均 0 の独立同分布（independent and identically distributed）な確率変数であり、

$$\mathrm{E}(Y_r^2) = \sigma^2, \qquad \mathrm{E}(Y_r^4) = (\kappa + 3)\sigma^4$$

が成り立つ。2 つ目の式は κ の定義を変形したものである。このとき $T = \sum Y_r = S - n\mu$ である。平行移動の結果により S は T と同じ尖度をもつので、平均が 0 である T を考えればよい。

独立性により $\mathrm{Var}(T) = \sum \mathrm{Var}(Y_r) = n\sigma^2$ である。小問 (ii) の二重和は $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$ 個の項からなり、各項は σ^4 に等しいので、

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(T^4) &= n(\kappa+3)\sigma^4 + 6 \cdot \tfrac{1}{2}n(n-1)\sigma^4 \\ &= n\sigma^4(\kappa + 3 + 3(n-1)) = n\sigma^4(\kappa + 3n).\end{aligned}$$

したがって T の尖度、すなわち S の尖度は

$$\frac{\mathrm{E}(T^4)}{(\mathrm{Var}\,T)^2} - 3 = \frac{n\sigma^4(\kappa+3n)}{n^2\sigma^4} - 3 = \frac{\kappa}{n} + 3 - 3 = \frac{\kappa}{n}$$

となり、示すべき結果が得られた。

検算

- Y がそれぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で $Y = \pm 1$ をとるとする。このとき $\mathrm{E}(Y^4) = \sigma^4 = 1$ なので $\kappa = 1 - 3 = -2$ である。$n = 2$ のとき、和は値 $-2, 0, 2$ をそれぞれ確率 $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ でとるので、$\mathrm{E}(T^4) = 8$、$\mathrm{Var}\,T = 2$ である。よって尖度は $8/4 - 3 = -1 = \kappa/2$ となり、予想どおりである。

- $n = 1$ のとき、小問 (iii) は何も変わらないことを述べており、当然そうあるべきである。
- 独立な正規分布に従う確率変数の和は正規分布に従うので、$\kappa = 0$ のときの小問 (iii) は再び 0 を与えなければならず、実際そうなっている。
- 3 つの値をとる確率変数の独立なコピーを最大 6 個まで加えた和の尖度が、ちょうど κ/n になることを、正確な分数を用いてコンピュータで確認した。また、いくつかの σ の値について $\int x^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 3\sigma^4$ となることも数値的に確かめた。

よくある間違い

- $Y_r^2 Y_s^2$ の係数を間違える。正しくは順序を考えない組 1 つあたり $\binom{4}{2} = 6$（順序を考える組 1 つあたりなら 3）であり、4 や 12 ではない。
- 小問 (ii) を使う前に X_r を中心化し忘れる。小問 (ii) は平均が 0 であることを必要とする。
- $(n\sigma^2)^2$ ではなく σ^4 で割ってしまう。和の分散は $n\sigma^2$ である。

STEP のその先へ

ここで定義した尖度は、4 次の**キュミュラント**（cumulant）を σ^4 で割ったものである。キュミュラントとは、積率母関数（moment generating function）の対数を展開したときの係数であり、独立な確率変数の和に対しては単純に足し合わされる。このため、和の標準化された 4 次のキュミュラントは $1/n$ のように小さくなり、3 次のもの（歪度（skewness））は $1/\sqrt{n}$ のように小さくなる。これは中心極限定理（central limit theorem）を定量的に垣間見せるものである。すなわち、和はますます正規分布に近づいていき、正規分布では 2 次より高次のキュミュラントはすべて 0 である。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、このレベルで母関数と中心極限定理を展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。