解答例

STEP III 2016、第 11 問

力学 ・ 仕事率と抵抗

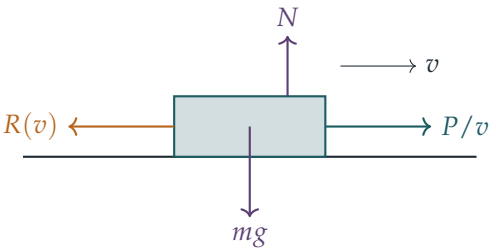
> **STEP III 2016、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q11

鍵となる考え方

一定の仕事率（power）P で動くエンジンは、速さ v のとき P/v の駆動力を生む。ここでは時間ではなく速さの関数として**距離**を求めたいので、加速度を $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ と書く。こうするとニュートン（Newton）の第二法則は、x を v で表す変数分離形（separable）の方程式になる。速さ $4U$ で加速度が 0 になるという事実から、抵抗（resistance）の定数が P と U で決まり、それぞれの距離は一つの定積分（definite integral）に帰着する。

解答

車を質量 m の質点（particle）とみなし、水平な直線上を、前向きの牽引力（tractive force）P/v と後ろ向きの抵抗 $R(v)$ を受けて運動するものとする。鉛直方向には重力と垂直抗力がつり合っており、以後の議論には関わらない。



$a = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ を用いると、水平方向の運動方程式（equation of motion）は

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{P}{v} - R(v), \qquad \text{したがって} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v} = \frac{mv^2}{P - vR(v)}.$$

となる。どちらのモデルでも $vR(v)$ は v について増加し、$v = 4U$ で P に等しい。よって $U \le v \le 2U$ では分母は正であり、車はこの間ずっと確かに加速している。つまり x は v とともに増加し、距離は

$$X = \int_U^{2U} \frac{mv^2}{P - vR(v)}\,\mathrm{d}v.$$

である。

小問 (i)

$R = kv$ とする。$4U$ で加速度が 0 であることから $\dfrac{P}{4U} = 4kU$、よって $k = \dfrac{P}{16U^2}$ である。すると

$$P - kv^2 = k\,(16U^2 - v^2), \qquad \frac{m}{k} = \frac{16mU^2}{P} = \frac{1}{\lambda U}.$$

となる。したがって、$v = Uw$ と置換すると

$$\lambda X_1 = \frac{1}{U}\int_U^{2U} \frac{v^2}{16U^2 - v^2}\,\mathrm{d}v = \int_1^2 \frac{w^2}{16 - w^2}\,\mathrm{d}w,$$

を得る。$\dfrac{w^2}{16 - w^2} = -1 + \dfrac{16}{16 - w^2} = -1 + \dfrac{2}{4 - w} + \dfrac{2}{4 + w}$ と書き直すと、

$$\begin{aligned}\lambda X_1 &= \Big[-w + 2\ln\frac{4 + w}{4 - w}\Big]_1^2 \\ &= -1 + 2\ln 3 - 2\ln\tfrac{5}{3} = 2\ln\tfrac{9}{5} - 1,\end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

次に $R = cv^2$ とする。$4U$ で加速度が 0 であることから $\dfrac{P}{4U} = 16cU^2$、よって $c = \dfrac{P}{64U^3}$ である。すると

$$P - cv^3 = c\,(64U^3 - v^3), \qquad \frac{m}{c} = \frac{64mU^3}{P} = \frac{4}{\lambda}.$$

となる。

> **考えてみよう** ここにはきれいな原始関数（antiderivative）があるだろうか。それとも再び部分分数分解（partial fractions）が必要だろうか。

分子の v^2 は、定数倍を除いて分母 $64U^3 - v^3$ の導関数である。したがって、この積分はすぐに対数になる。

$$\begin{aligned}\lambda X_2 &= 4\int_U^{2U} \frac{v^2}{64U^3 - v^3}\,\mathrm{d}v = 4\Big[-\tfrac{1}{3}\ln(64U^3 - v^3)\Big]_U^{2U} \\ &= \tfrac{4}{3}\ln\frac{63U^3}{56U^3} = \tfrac{4}{3}\ln\tfrac{9}{8},\end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (iii)

$\lambda > 0$ なので、$X_1 > X_2$ となるのは $\lambda X_1 - \lambda X_2 > 0$ のとき、かつそのときに限る。与えられているのは $\ln 24$ と $\ln 5$ の評価だけなので、差をこれらで書き直す。

$$\begin{aligned}\lambda(X_1 - X_2) &= 2\ln 9 - 2\ln 5 - 1 - \tfrac{4}{3}\ln 9 + \tfrac{4}{3}\ln 8 \\ &= \tfrac{4}{3}\ln 3 + 4\ln 2 - 2\ln 5 - 1 \\ &= \tfrac{4}{3}(\ln 3 + 3\ln 2) - 2\ln 5 - 1 = \tfrac{4}{3}\ln 24 - 2\ln 5 - 1.\end{aligned}$$

? **考えてみよう** それぞれの評価をどちら向きに使うべきだろうか。

差が正であることを示すには**下からの**評価が必要である。そこで、$\ln 24$（正の符号で現れる）には下界を、$\ln 5$（負の符号で現れる）には上界を用いる。

$$\lambda(X_1 - X_2) > \tfrac{4}{3}(3.17) - 2(1.61) - 1 = 4.22\dot{6} - 3.22 - 1 = 0.00\dot{6} > 0.$$

したがって $X_1 > X_2$ である。すなわち、U から $2U$ まで加速する間に車が進む距離は、抵抗が速さの 2 乗に比例する場合よりも、速さに比例する場合のほうが長い。

これは物理的にも納得がいく。二つの抵抗は $v = 4U$ で一致するが、$v < 4U$ では $cv^2 = kv \cdot \frac{v}{4U} < kv$ となる。よって、問題となる速さの範囲では 2 乗の法則のほうが抵抗が**小さく**、車はより強く加速し、より早く $2U$ に達する。

検算

- 数値的には $\lambda X_1 = 2\ln 1.8 - 1 \approx 0.1756$、$\lambda X_2 = \frac{4}{3}\ln 1.125 \approx 0.1570$ であり、差はおよそ 0.0185 で、求めたとおり正である。$v = U$ から運動方程式を時間について刻んでいくコンピュータシミュレーションでも、両方の値が小数第 5 位まで再現される。
- 単位：$P/(mU^3)$ の単位は $\mathrm{W}/(\mathrm{kg\,m^3\,s^{-3}}) = \mathrm{m^{-1}}$ なので、λX は無次元量（dimensionless）であり、そうなるべきである。
- 小問 (iii) の最後の物理的な議論は、これとは独立に同じ大小関係を予測している。

よくある間違い

- $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ を使ってしまうと、距離ではなく時間が求まる。ここで必要なのは $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ である。

- 小問 (iii) で評価を逆向きに使ってしまう。3.18 と 1.60 を使うと上界しか得られず、符号については何も証明できない。
- 余裕がごくわずか（$0.00\dot{6}$）であることを忘れ、$\frac{4}{3}(3.17)$ を 4.2 に丸めてしまうと結論が失われる。

STEP のその先へ

$a = v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ と書くことは、大学の力学で学ぶエネルギー法（energy method）への第一歩である。運動方程式に v を掛けると運動エネルギー（kinetic energy）の変化率が得られ、それは供給される仕事率から散逸する仕事率を引いたものに等しい。$4U$ のように両者がつり合う速さは一階微分方程式の**平衡点**（equilibria）であり、解がそこへどのように近づくかを調べることが力学系（dynamical systems）の始まりである。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、仕事、仕事率、速度に依存する力をこのような流儀で扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。