解答例

STEP III 2016、第 10 問

力学 ・ 平面上の円運動

> **STEP III 2016、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q10

鍵となる考え方

糸がぴんと張り、粒子が斜面上にある間は、P は常に A から距離 a の位置にあり、しかも斜面内にあるので、A から下ろした垂線の足を中心とする**斜面内の**円の上を動く。斜面内で見れば、これは重力が $g\sin\alpha$ に弱められた鉛直面内の円運動にすぎない。一方、斜面に垂直な方向には糸が P を斜面から引き離そうとするので、垂直抗力（normal reaction）は正であり続けなければならない。そこで、張力（tension）と垂直抗力を求め、それぞれがどこで最小になるかを調べる。

解答

設定

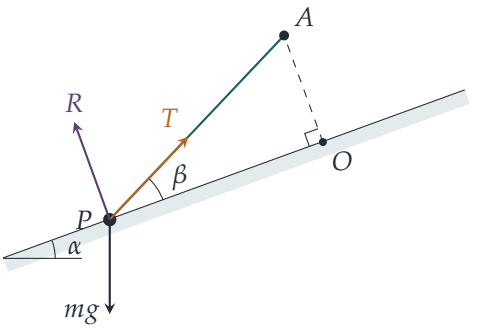
P を質点、糸を軽く伸び縮みしないもの、斜面をなめらかなものとしてモデル化する。A から斜面に下ろした垂線の足を O とする。糸の長さは a で、糸と斜面のなす角は β であるから、

$$AO = a\sin\beta, \qquad OP = a\cos\beta.$$

釣り合い（equilibrium）の状態では、重力以外で斜面に沿った成分をもつ力は張力だけなので、糸は最大傾斜線（line of greatest slope）に沿っていなければならず、P は O から見て斜面の真下の方向にある。斜面に沿った方向と斜面に垂直な方向に力を分解すると（張力 T_0、垂直抗力 R_0）、

$$T_0\cos\beta = mg\sin\alpha, \qquad R_0 + T_0\sin\beta = mg\cos\alpha,$$

よって $R_0 = mg(\cos\alpha - \sin\alpha\tan\beta) = mg\cos(\alpha+\beta)/\cos\beta$ である。したがって、そもそも釣り合いが存在するためには $\cos(\alpha+\beta) > 0$ でなければならない。



図は、初期状態において最大傾斜線を通る断面である。AO は斜面に垂直である。

撃力（impulse）が加えられた後、糸が張ったままで P が斜面上にある限り、$AP = a$ かつ $AO = a\sin\beta$ であるから、三平方の定理（Pythagoras）より常に $OP = a\cos\beta$ である。つまり P は斜面内で O を中心とする半径

$$r = a\cos\beta$$

の円の上を動く。糸は常に斜面と角 β をなし、その斜面への射影は P から O の向きを向く。撃力は水平かつ斜面に平行なので、この円の最下点における接線の方向を向いている。

O を通る下向きの最大傾斜線と OP のなす角を θ とし（初期状態では $\theta = 0$）、速さを v とする。重力は、斜面に沿って下向きに（斜面内で）$mg\sin\alpha$、斜面に垂直に斜面へ向かって $mg\cos\alpha$ の成分をもつ。

斜面に垂直な方向には P は加速度をもたないので、

$$R + T\sin\beta = mg\cos\alpha. \tag{1}$$

斜面内で O に向かう方向には、加速度は v^2/r である。張力の寄与は $T\cos\beta$、斜面下向きの重力成分の寄与は $-mg\sin\alpha\cos\theta$ であるから、

$$T\cos\beta - mg\sin\alpha\cos\theta = \frac{mv^2}{a\cos\beta}. \tag{2}$$

エネルギー：垂直抗力と張力は仕事をしない（どちらも速度に垂直である）。また P は斜面に沿って距離 $r(1-\cos\theta)$ だけ上がる、すなわち高さ $r(1-\cos\theta)\sin\alpha$ だけ上昇する。よって

$$v^2 = u^2 - 2ga\cos\beta\sin\alpha\,(1-\cos\theta). \tag{3}$$

すぐには斜面を離れないこと

撃力を加えた直後は $\theta = 0$、$v = u$ である。(2) より $T\cos\beta = mg\sin\alpha + \dfrac{mu^2}{a\cos\beta}$ であり、これと (1) から

$$\begin{aligned} R &= mg\cos\alpha - \tan\beta\left(mg\sin\alpha + \frac{mu^2}{a\cos\beta}\right) \\ &= \frac{m}{\cos\beta}\left(g\cos\alpha\cos\beta - g\sin\alpha\sin\beta\right) - \frac{mu^2\tan\beta}{a\cos\beta} \\ &= \frac{m}{a\cos\beta}\Big(ag\cos(\alpha+\beta) - u^2\tan\beta\Big). \end{aligned}$$

$\cos\beta > 0$ であるから、垂直抗力が正となり、粒子がすぐには斜面を離れないのは

$$ag\cos(\alpha+\beta) > u^2\tan\beta,$$

のときであり、これが示すべきことであった。

円を一周する

(3) を (2) に代入すると、一般の位置での張力が得られる：

$$T\cos\beta = \frac{mu^2}{a\cos\beta} - 2mg\sin\alpha + 3mg\sin\alpha\cos\theta,$$

したがって (1) より

$$R = mg\cos\alpha - \tan\beta\left(\frac{mu^2}{a\cos\beta} - 2mg\sin\alpha + 3mg\sin\alpha\cos\theta\right).$$

考えてみよう 粒子が斜面を離れる可能性が最も高いのは円上のどこか。最上点か、それとも最下点か。

鉛直面内の円運動からの直感では「最上点」と答えたくなるが、ここでの最上点は**糸**にとっての危険箇所であって、斜面にとってのものではない。糸は P を力 $T\sin\beta$ で斜面から引き離そうとし、張力は最下点で最大になる。そこでは P が最も速く動いており、しかも斜面内の重力も O から遠ざかる向きに引くからである。実際、R は $\cos\theta$ が最大のとき、すなわち $\theta = 0$ で最小となり、T は $\cos\theta = -1$ のとき、すなわち最上点で最小となる。したがって、接触を保ったまま円を一周するには、次の二つが必要である。

- **最下点での接触**。$\theta = 0$ で $R > 0$ であること。これはまさに前半の条件 $u^2\tan\beta < ag\cos(\alpha+\beta)$ である。

- **最上点で糸が張っていること**。$\theta = \pi$ で $T \geq 0$ であること。すなわち $\dfrac{u^2}{a\cos\beta} - 5g\sin\alpha \geq 0$、つまり $u^2 \geq 5ag\sin\alpha\cos\beta$ である。（(3) より、このとき最上点で $v^2 > 0$ も成り立つ。）

二つ目の条件に $\tan\beta > 0$ を掛けると、両方が成り立ちうるのは

$$5ag\sin\alpha\cos\beta\tan\beta \leq u^2\tan\beta < ag\cos(\alpha+\beta),$$

の場合に限られる。すなわち

$$5\sin\alpha\sin\beta < \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \iff 6\sin\alpha\sin\beta < \cos\alpha\cos\beta.$$

$\cos\alpha\cos\beta > 0$ で割ると、必要条件

$$6\tan\alpha\tan\beta < 1.$$

が得られる。（これは十分条件でもある。これが成り立てば、$5ag\sin\alpha\cos\beta \leq u^2 < ag\cos(\alpha+\beta)/\tan\beta$ を満たす任意の u でよい。このとき円上のいたるところで R と T が正になるからである。）

検算

- $u = 0$ とすると、前半で求めた垂直抗力は $mg\cos(\alpha+\beta)/\cos\beta$ となり、釣り合いのときの値 R_0 と一致する。
- $\beta \to 0$（糸がほぼ斜面に沿っている）のとき、糸は粒子を持ち上げることができず、条件 $6\tan\alpha\tan\beta < 1$ は自動的に成り立つ。これは当然そうなるべきである。
- $\alpha = 30°$、$\beta = 5°$（このとき $6\tan\alpha\tan\beta \approx 0.30$）、$a = 1\,\mathrm{m}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ とすると、許される範囲は $24.4 \leq u^2 < 91.8$（単位は $\mathrm{m^2\,s^{-2}}$）である。$u^2 = 50$ とすると、垂直抗力の最小値は最下点で約 $0.37mg$、張力の最小値は最上点で約 $2.63mg$ となる。円周全体にわたって三次元でニュートン（Newton）の運動の第二法則を解くことで、R と T が正のままであり、上の値になることをコンピュータで確認した。

よくある間違い

- 円の半径として糸の長さ a をそのまま使ってしまう。半径は $a\cos\beta$ である。
- 粒子が斜面を離れやすいのは円の最上点だと思い込む。垂直抗力が最小になるのは最下点である。
- エネルギーの式で $g\sin\alpha$ の代わりに g を使ってしまう。粒子が鉛直方向に上がるのは $r(1-\cos\theta)\sin\alpha$ だけである。

STEP のその先へ

これは拘束（constraint）のもとでの運動である。斜面と糸はそれぞれ、拘束を保つのにちょうど必要な大きさの抗力を及ぼし、その運動が有効なのはそれらの力が正しい符号をもつ間だけである。大学 1 年次の講義では、ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）を用いて拘束を取り除き、あとから抗力を求めるという、系統的な扱い方を学ぶ。Kleppner and Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）には、まさにこの「いつ接触が失われるか」という種類の問題が数多く収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。