解答例

STEP III 2016、第 1 問

純粋数学 ・ 漸化式による積分

> **STEP III 2016、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q1

鍵となる考え方

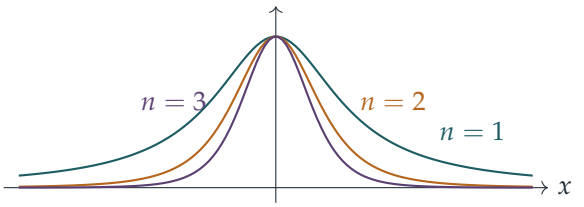
平方完成（completing the square）により、2 次式は $(x+a)^2+c^2$（ただし $c^2=b-a^2>0$）の形になる。そのうえで正接による置換（tangent substitution）を行えば、I_1 はただちに求まる。漸化式（reduction formula）については、1 を相手に部分積分（integration by parts）するのがこつである。$(x^2+2ax+b)^{-n}$ を微分すると指数が $n+1$ に上がり、これこそ I_n と I_{n+1} を結びつけるのに必要なものである。あとの数学的帰納法（induction）は、二項係数（binomial coefficient）を整理するだけの作業である。

解答

以下では一貫して

$$Q(x)=x^2+2ax+b=(x+a)^2+c^2, \qquad c=\sqrt{b-a^2}>0.$$

と書く。すべての x に対して $Q(x)\geq c^2>0$ であるから被積分関数（integrand）は連続であり、また $Q(x)^n$ は $2n\geq 2$ として x^{2n} のように増大するから、どの I_n も収束（converge）する。



$a=0$、$b=1$ のときの被積分関数 $1/Q^n$。n が大きくなるにつれて幅が狭くなるので、

$c = 1$ のとき I_n は小さくなっていくと予想される。

小問 (i)

$x + a = c\tan u$ とおくと、$\mathrm{d}x = c\sec^2 u\,\mathrm{d}u$ である。x が $-\infty$ から ∞ まで動くとき、u は $-\frac{\pi}{2}$ から $\frac{\pi}{2}$ まで動き、

$$Q(x) = c^2\tan^2 u + c^2 = c^2\sec^2 u.$$

となる。したがって

$$I_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{c\sec^2 u}{c^2\sec^2 u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{c}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}u = \frac{\pi}{c} = \frac{\pi}{\sqrt{b-a^2}},$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

$u = Q^{-n}$、$\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$ として I_n を部分積分する。$Q'(x) = 2(x+a)$ であるから、$v = x$ ではなく $v = x + a$ を選ぶほうが賢い（原始関数（antiderivative）はどれを選んでもよい）。このとき

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,Q^{-n} = -2n(x+a)\,Q^{-n-1},$$

であるから、

$$I_n = \Big[\,\frac{x+a}{Q^n}\,\Big]_{-\infty}^{\infty} + 2n\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+a)^2}{Q^{n+1}}\,\mathrm{d}x.$$

となる。

? 考えてみよう なぜ境界項は消えるのか？

分子は $|x|$ のように増大し、分母は x^{2n} のように増大する。そして $n \geq 1$ であるから $2n \geq 2$ である。よって $x \to \pm\infty$ のとき $(x+a)/Q^n \to 0$ となり、括弧の項は 0 である。

次に $(x+a)^2 = Q - c^2$ を用いて、残った積分を分ける。

$$\begin{aligned} I_n &= 2n\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q-c^2}{Q^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\ &= 2n\,I_n - 2nc^2\,I_{n+1}. \end{aligned}$$

整理すると $2nc^2 I_{n+1} = (2n-1)I_n$、すなわち

$$2n(b-a^2)\,I_{n+1} = (2n-1)\,I_n,$$

となり、示すべき式が得られた。（I_n と I_{n+1} はともに収束するので、積分を分けることは正当である。）

小問 (iii)

$P(n)$ を次の命題とする。

$$I_n = \frac{\pi}{2^{2n-2}\, c^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1},$$

ここで $c^{2n-1} = (b-a^2)^{n-\frac{1}{2}}$ である。

初期段階。$n=1$ のとき、右辺は $\dfrac{\pi}{2^0 c^1}\binom{0}{0} = \dfrac{\pi}{c}$ であり、小問 (i) よりこれは I_1 に等しい。よって $P(1)$ は成り立つ。

帰納段階。ある $n \geq 1$ について $P(n)$ が成り立つと仮定する。小問 (ii) より

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2nc^2} I_n = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{\pi}{2^{2n-2}\, c^{2n+1}} \binom{2n-2}{n-1}.$$

である。これが $P(n+1)$ にあたる $\dfrac{\pi}{2^{2n} c^{2n+1}}\binom{2n}{n}$ に等しいことを示したい。二つの二項係数の間には次の関係がある。

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\, n!} = \frac{(2n)(2n-1)}{n \cdot n} \cdot \frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!} = \frac{2(2n-1)}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

考えてみよう 2 の累乗をどのように合わせればよいか？

$\dfrac{2n-1}{2n} = \dfrac{4}{2^2} \cdot \dfrac{2n-1}{2n} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{2(2n-1)}{n}$ と書く。すると

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{1}{4} \cdot \frac{2(2n-1)}{n} \cdot \frac{\pi}{2^{2n-2}\, c^{2n+1}} \binom{2n-2}{n-1} \\ &= \frac{\pi}{2^{2n}\, c^{2n+1}} \cdot \frac{2(2n-1)}{n}\binom{2n-2}{n-1} = \frac{\pi}{2^{2n}\, c^{2n+1}}\binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

となる。$2n = 2(n+1)-2$、$n = (n+1)-1$、$c^{2n+1} = (b-a^2)^{(n+1)-\frac{1}{2}}$ であるから、これはまさに $P(n+1)$ である。

数学的帰納法により、すべての正の整数 n について $P(n)$ が成り立つ。すなわち

$$I_n = \frac{\pi}{2^{2n-2}(b-a^2)^{n-\frac{1}{2}}} \binom{2n-2}{n-1}.$$

である。

検算

- $a=0$、$b=1$、$n=2$ のとき、公式は $I_2 = \frac{\pi}{4}\binom{2}{1} = \frac{\pi}{2} \approx 1.5708$ を与える。$\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)^{-2}\,\mathrm{d}x$ の数値計算は、小数第 10 位まで一致する。

- 正接による置換からは $I_n = c^{1-2n}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{2n-2}u\,\mathrm{d}u$ も得られる。これは標準的なウォリス（Wallis）積分（Wallis integral）であり、その既知の値は公式と一致する。
- $b > a^2$ を満たす無作為ないくつかの a、b について、$n = 1,\ldots,5$ で数値積分により公式を確認した。したがって小問 (ii) の漸化式も確認されたことになる。

よくある間違い

- 小問 (ii) の境界項（boundary term）が消えることの正当化を忘れる。これには $n \geq 1$ が必要である。
- 部分積分で $v = x + a$ ではなく $v = x$ を選んでしまう。それでも計算はできるが、余分な項 $a\int(x+a)Q^{-n-1}\,\mathrm{d}x$ を処理しなければならなくなる。
- 帰納段階で $b - a^2$ の指数を見失う。各段階で $1/c^2$ を掛けるので、c の指数はちょうど 2 ずつ、$2n-1$ から $2n+1$ へと増える。

STEP のその先へ

有理関数（rational function）の実数直線全体にわたる積分は、複素解析（complex analysis）の格好の見せ場である。留数定理（residue theorem）を使えば、上半平面（upper half-plane）にある $1/Q^n$ のただ一つの極（pole）$z = -a + ic$ に着目することで、I_n を数行で計算できる。ここに現れた中心二項係数（central binomial coefficient）は、π に関するウォリス積（Wallis product）やランダムウォーク（random walk）にも登場する。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ビジュアル複素解析』）は、留数について美しく幾何学的な解説を与えている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。