解答例

STEP II 2016、第 9 問

力学 ・ 運動量とエネルギー損失

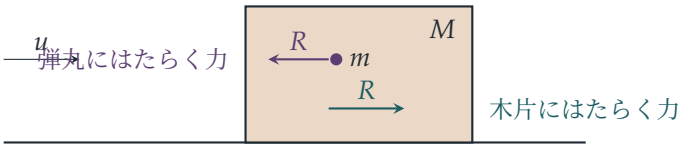
> **STEP II 2016、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q9

鍵となる考え方

抵抗力 R は弾丸と木片の間にはたらく内力（internal force）である。この力は弾丸を減速させ、ニュートン（Newton）の第 3 法則により、同じ大きさで木片を前方へ押す。したがって、両者を合わせた運動量（momentum）は保存されるが、運動エネルギー（kinetic energy）は保存されない。失われるエネルギーは、弾丸が木片の内部を**相対的に**進む距離にわたって R がする仕事にちょうど等しい。木片だけに仕事とエネルギーの関係（work–energy principle）を適用すれば、木片が動く距離が求まる。

解答

弾丸と木片を一本の水平な直線上を運動する質点とみなし、弾丸が木片に対して動いている間、抵抗力 R は一定であるとする。弾丸の初めの向きを正の向きにとる。



鉛直方向の力（重力と台からの垂直抗力）はつり合っており、運動には関与しない。水平方向には、弾丸は後ろ向きに R を受け、木片は前向きに R を受ける。

小問 (i)

木片が固定されているとき、弾丸の減速度は一定で R/m である。$v^2 = u^2 + 2\alpha s$ において、最後の速さを 0、$\alpha = -R/m$ とすると

$$0 = u^2 - \frac{2R}{m}a \quad \Longrightarrow \quad \boxed{a = \frac{mu^2}{2R}.}$$

（同じことであるが、抵抗力に逆らってする仕事 Ra が、弾丸の初めの運動エネルギー $\frac{1}{2}mu^2$ に等しいといってもよい。）

小問 (ii)

最終的な共通の速度。台はなめらかなので、弾丸と木片からなる系には水平方向の外力がはたらかない。弾丸が木片に対して静止したとき、両者は同じ速度 V で動き、運動量保存則（conservation of momentum）により

$$mu = (M+m)V \quad \Longrightarrow \quad V = \frac{mu}{M+m}.$$

考えてみよう 抵抗力は木片内部の弾丸の経路上で距離 b にわたってはたらくが、弾丸自身は台に対して $b+c$ だけ進む。エネルギーの式に入るのはどちらの距離だろうか？

b を求める。台に対して考えると、弾丸は $b+c$ だけ動くので、弾丸にはたらく力 R がする仕事は $-R(b+c)$ である。木片は c だけ動くので、木片にはたらく力 R がする仕事は $+Rc$ である。よって系全体にされる仕事の総和は $-Rb$ であり、相対変位だけが効いてくる。仕事とエネルギーの関係により

$$\begin{aligned} Rb &= \tfrac{1}{2}mu^2 - \tfrac{1}{2}(M+m)V^2 \\ &= \tfrac{1}{2}mu^2 - \frac{m^2u^2}{2(M+m)} \\ &= \tfrac{1}{2}mu^2\left(1 - \frac{m}{M+m}\right) = \tfrac{1}{2}mu^2 \cdot \frac{M}{M+m}. \end{aligned}$$

小問 (i) より $\frac{1}{2}mu^2 = Ra$ であるから、両辺を R で割って

$$\boxed{b = \frac{M}{M+m}a.}$$

c を求める。次に、木片だけに仕事とエネルギーの関係を適用する。木片は静止状態から動き始めて速さ V に達し、木片にはたらく水平方向の力は前向きの R のみで、それが距離 c にわたってはたらく。したがって

$$Rc = \tfrac{1}{2}MV^2 = \frac{Mm^2u^2}{2(M+m)^2} = \tfrac{1}{2}mu^2 \cdot \frac{mM}{(M+m)^2}.$$

再び $\frac{1}{2}mu^2 = Ra$ を用いると

$$\boxed{c = \frac{mM}{(M+m)^2}\,a.}$$

運動学による別解。弾丸は R/m で減速し、木片は R/M で加速する。両者の速度が一致するのは $u - Rt/m = Rt/M$ のときであるから

$$t = \frac{mMu}{R(M+m)}, \qquad c = \frac{1}{2}\cdot\frac{R}{M}\,t^2 = \frac{m^2Mu^2}{2R(M+m)^2},$$

となり、上の結果と一致する。また b は、弾丸の変位から c を引けば得られる。

検算

- $M \to \infty$ のとき、木片は固定されているのと同じようにふるまう。実際 $b \to a$、$c \to 0$ となり、期待どおりである。
- $\frac{M}{M+m} < 1$ であるから $b < a$ である。動くことのできる木片は弾丸のエネルギーのうち熱として吸収する分が少ないので、弾丸はそれほど深くまでめり込まない。
- $M = 4m$ のとき、$b = \frac{4}{5}a$、$c = \frac{4}{25}a$ となる。m、M、u、R をいくつか無作為に選び、小さな時間刻みで運動を数値的に進めてみると、a、b、c が有効数字 4 桁まで再現される。

よくある間違い

- エネルギー損失の式で、相対距離 b ではなく、弾丸が台に対して進む距離 $b + c$ を用いてしまう。
- 衝突において運動エネルギーが保存されると仮定してしまう。実際には保存されず、損失分 Rb が発生する熱である。
- 木片も力 R を受けること（ニュートンの第 3 法則）を忘れ、木片の運動を説明できないままにしてしまう。

STEP のその先へ

内力がする仕事の総和が 0 になるのは相対運動がない場合に限る、という事実は、質点系のエネルギーを丁寧に扱う理論の出発点である。重心系（centre-of-mass frame）で考えると見通しがよくなる。散逸に使える運動エネルギーは、換算質量（reduced mass）$\mu = mM/(M+m)$ を用いて $\frac{1}{2}\mu u^2$ と表され、これはここでの Rb にちょうど等

しい。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、これらの考え方を徹底的に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。