解答例

STEP II 2016、第 8 問

純粋数学 • 積分による和の近似

> **STEP II 2016、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q8

鍵となる考え方

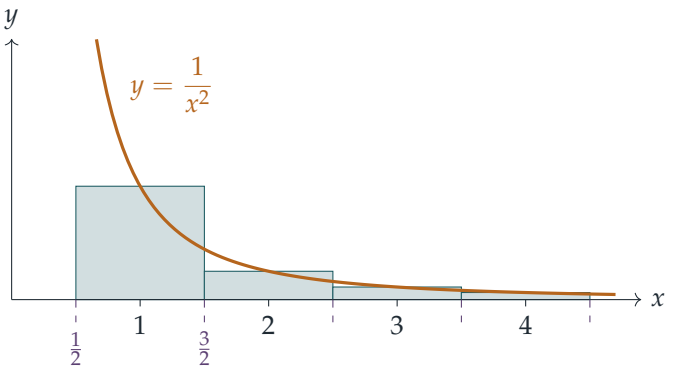
項 $\frac{1}{r^2}$ は幅 1、高さ $\frac{1}{r^2}$ の長方形の面積である。この長方形を $x = r$ を中心に置くと、その面積は $r - \frac{1}{2}$ から $r + \frac{1}{2}$ までの $y = \frac{1}{x^2}$ の下側の面積にきわめて近い（中点公式（midpoint rule））。これらの細長い帯をつなぎ合わせると、和が一つの積分（integral）に変わる。さらに各帯における誤差（error）は正確に計算でき、その誤差を足し合わせることで、第二の級数（series）$\sum \frac{1}{r^4}$ がほとんど労せずに得られる。

解答

積分と概形

$m > \frac{1}{2}$ のとき下端は正であるから、被積分関数（integrand）は積分区間で連続であり、

$$\int_{m-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{X\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_{m-\frac{1}{2}}^{X} = \frac{1}{m-\frac{1}{2}} = \frac{2}{2m-1}.$$



$x = r$ を中心とする長方形は幅 1、高さ $\frac{1}{r^2}$ であるから、その面積は $\frac{1}{r^2}$ である。帯 $r - \frac{1}{2} \le x \le r + \frac{1}{2}$ において、曲線は左半分では長方形の上辺より上にあり、右半分では下にある。この二つの小さな部分はほぼ打ち消し合う。よって

$$\frac{1}{r^2} \approx \int_{r-\frac{1}{2}}^{r+\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

これを $r = m, m+1, \ldots, n$ について足し合わせると、帯は端と端がつながって $[m - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}]$ を覆うので、$(*)$ が得られる。

小問 (i)

$(*)$ において $n \to \infty$ とする。右辺は先に求めた積分に収束（converge）するので、

$$\sum_{r=m}^{\infty} \frac{1}{r^2} \approx \frac{2}{2m-1}.$$

これを級数全体に適用してもよいし、最初の数項は正確に足し、残りの部分（tail）だけを近似してもよい：

$$\begin{aligned}
m = 1: &\quad E \approx \frac{2}{1} = 2,\\
m = 2: &\quad E = 1 + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r^2} \approx 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3},\\
m = 3: &\quad E = 1 + \frac{1}{4} + \sum_{r=3}^{\infty} \frac{1}{r^2} \approx \frac{5}{4} + \frac{2}{5} = \frac{33}{20}.
\end{aligned}$$

これらが求める三つの近似値である。遠くへ行くほど曲線は平らになり、中点による近似がよくなるので、m が大きくなるにつれて近似は改善するはずである。

小問 (ii)

一つの帯における積分は

$$\int_{r-\frac{1}{2}}^{r+\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{r-\frac{1}{2}} - \frac{1}{r+\frac{1}{2}} = \frac{1}{r^2-\frac{1}{4}} = \frac{4}{4r^2-1}.$$

よって、$\frac{1}{r^2}$ をこの積分で近似したときの誤差は

$$\frac{4}{4r^2-1} - \frac{1}{r^2} = \frac{4r^2-(4r^2-1)}{r^2(4r^2-1)} = \frac{1}{r^2(4r^2-1)} = \frac{1}{4r^4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4r^2}}.$$

r が大きいとき $\frac{1}{4r^2}$ は小さいので、最後の因数は 1 に近く、誤差はおよそ $\frac{1}{4r^4}$ となり、題意が示された。(積分の方が常に大きいことは図とも整合する。$\frac{1}{x^2}$ は凸 (convex) であるから、各帯の左側で余分になる面積が右側で不足する面積を上回るのである。)

最後の結果を得るため、$r = m$ 以降の誤差を足し合わせる。帯ごとの積分を足し合わせると最初に求めた積分になるので、

$$\frac{2}{2m-1} - \sum_{r=m}^{\infty}\frac{1}{r^2} = \sum_{r=m}^{\infty}\frac{1}{r^2(4r^2-1)} \approx \frac{1}{4}\sum_{r=m}^{\infty}\frac{1}{r^4}.$$

考えてみよう いちばん簡単そうに見える $m = 1$ をとらないのはなぜか。

$m = 1$ とすると左辺は $2 - 1.645 = 0.355$ となり、$\sum \frac{1}{r^4} \approx 1.42$ が得られるが、これは大きすぎる。問題は、「$\approx \frac{1}{4r^4}$」が r の大きいときにしか良い近似でないことである。$r = 1$ では真の誤差は $\frac{1}{4}$ ではなく $\frac{1}{3}$ であり、この最初の項が和全体を支配してしまう。したがって、最初の数項は正確に保ち、近似は残りの部分にだけ用いるべきである。$m = 3$ ($\frac{33}{20}$ を与えた選び方) をとると、最も悪い因数 $\frac{1}{1-1/(4r^2)}$ は $\frac{36}{35}$ であり、1 との差は 3% 以内である：

$$\frac{1}{4}\sum_{r=3}^{\infty}\frac{1}{r^4} \approx \frac{2}{5} - \left(E - 1 - \frac{1}{4}\right) \approx 0.4 - 0.395 = 0.005,$$

よって $\sum_{r=3}^{\infty}\frac{1}{r^4} \approx 0.02$ であり、

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^4} \approx 1 + \frac{1}{16} + 0.02 = 1.0825 \approx 1.08.$$

これが求める結果である。E は小数第 3 位までしか与えられていないので、E における最大 0.0005 の誤差はここでは最大 0.002 の誤差となるが、それでも 1.08 は変わらない。

検算

- 近似値 2、$\frac{5}{3} \approx 1.667$、$\frac{33}{20} = 1.65$ は $E = \frac{\pi^2}{6} \approx 1.6449$ に向かって減少しており、凸性による議論が予測するとおり、いずれも大きすぎる。

- $r = 10$ のとき、正確な誤差 $\frac{1}{100\times399} \approx 2.506 \times 10^{-5}$ は $\frac{1}{4\times10^4} = 2.5 \times 10^{-5}$ にきわめて近い。
- 正確な値は $\sum \frac{1}{r^4} = \frac{\pi^4}{90} \approx 1.0823$ であり、我々の 1.0825 と一致する。代わりに $m = 2$ を用いると $1 + 4\left(\frac{2}{3} - 0.645\right) \approx 1.087$ となり、明らかに悪くなる。$m = 1$ では 1.42 となる。

よくある間違い

- 最後の小問で、r が大きいときの近似 $\frac{1}{4r^4}$ が悪い $m = 1$ を用いてしまい、1.42 を得る。
- 誤差の符号を逆にする。積分は $\frac{1}{r^2}$ より大きいので、$\frac{2}{2m-1}$ は残りの部分の過大評価である。
- 正確に計算した最初の項（$1 + \frac{1}{4}$ や $1 + \frac{1}{16}$）を足し戻すのを忘れる。

STEP のその先へ

これは中点公式であり、誤差項 $\frac{1}{4r^4}$ はオイラー＝マクローリンの公式（Euler–Maclaurin formula）の一端を垣間見せるものである。この公式は和を積分と導関数の項からなる級数とで補正するものであり、$\sum \frac{1}{r^2}$ のような和を小数点以下何桁も計算するのに用いられる。正確な値 $\frac{\pi^2}{6}$ と $\frac{\pi^4}{90}$ は、フーリエ級数（Fourier series）、あるいはオイラー（Euler）による $\sin x$ の積表示から得られる。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門）は級数と積分を丁寧に扱っており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（発展的な数学の問題集）にはこの種の問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。