解答例

STEP II 2016、第 7 問

純粋数学 • 対称性を用いた定積分

> **STEP II 2016、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q7

鍵となる考え方

区間 $[0, a]$ をその中点に関して折り返す変換 $x \mapsto a - x$ を施しても積分（integral）の値は変わらないが、被積分関数（integrand）はもとの関数と見事に組み合わさる形に変わることがある。$[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上の三角関数の被積分関数では、この変換によって sin と cos が入れ替わる。$[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上では、$\tan(\frac{1}{4}\pi - x)$ に対する加法定理（compound-angle formula）が役に立つ。最後の小問は新しい問題に見えるが、部分積分（integration by parts）によって小問 (iii) に帰着する。

解答

結果 $(*)$

$\int_0^a f(a-x)\,\mathrm{d}x$ において $u = a - x$ と置換（substitution）すると、$\mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$ である。$x = 0$ のとき $u = a$、$x = a$ のとき $u = 0$ である。よって

$$\int_0^a f(a-x)\,\mathrm{d}x = \int_a^0 f(u)\,(-\mathrm{d}u) = \int_0^a f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x,$$

となる。積分変数の名前は何でもよいからである。これが $(*)$ である。

小問 (i)

この積分を I とおく。$a = \frac{1}{2}\pi$ とすると $\sin(\frac{1}{2}\pi - x) = \cos x$、$\cos(\frac{1}{2}\pi - x) = \sin x$ であるから、$(*)$ より

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x.$$

これをもとの形の I に加えると

$$2I = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} 1\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2},$$

したがって

$$I = \frac{\pi}{4}.$$

（分母 $\cos x + \sin x$ は $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上で正であるから、何も問題は生じない。）

小問 (ii)

今度は $a = \frac{1}{4}\pi$ であり、小問 (i) の手法ではもはや sin と cos は入れ替わらない。代わりに、分子と分母を $\cos x$（この区間で正）で割ると、被積分関数は

$$\frac{\sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{\tan x}{1 + \tan x}.$$

となる。$t = \tan x$ とおく。$\tan(\frac{1}{4}\pi - x) = \dfrac{1-t}{1+t}$ であるから

$$\frac{\tan(\frac{1}{4}\pi - x)}{1 + \tan(\frac{1}{4}\pi - x)} = \frac{(1-t)/(1+t)}{2/(1+t)} = \frac{1-t}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tan x.$$

よって、この積分を J とおくと、$(*)$ より

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tan x\Big)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\Big[-\ln\cos x\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2. \end{aligned}$$

考えてみよう $(*)$ をまったく使わずに小問 (ii) を解く方法はあるだろうか？

ある。$K = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x$ とおく。すると $J + K = \frac{1}{4}\pi$ であり、分子 $\cos x - \sin x$ は分母の導関数であるから

$$K - J = \Big[\ln(\cos x + \sin x)\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} = \ln\sqrt{2} = \tfrac{1}{2}\ln 2.$$

辺々引くと $2J = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\ln 2$ となり、上の答えと一致する。

小問 (iii)

この積分を L とおく。同じ加法定理より

$$1 + \tan(\tfrac{1}{4}\pi - x) = 1 + \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \frac{2}{1 + \tan x}.$$

よって $(*)$ より

$$L = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \ln \frac{2}{1+\tan x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} (\ln 2 - \ln(1+\tan x))\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\ln 2 - L.$$

ゆえに $2L = \frac{1}{4}\pi \ln 2$ であり

$$L = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

小問 (iv)

分子と分母を $\cos^2 x$ で割ると

$$\frac{x}{\cos x\,(\cos x + \sin x)} = \frac{x\sec^2 x}{1+\tan x}.$$

考えてみよう $\dfrac{\sec^2 x}{1+\tan x}$ は小問 (iii) とどのように関係しているだろうか？

これはちょうど $\ln(1+\tan x)$ の導関数である。$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+\tan x) = \sec^2 x$ だからである。また $[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上で $1+\tan x > 0$ である。そこで $u = x$、$\mathrm{d}v = \dfrac{\sec^2 x}{1+\tan x}\,\mathrm{d}x$、$v = \ln(1+\tan x)$ として部分積分を行う：

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{x\sec^2 x}{1+\tan x}\,\mathrm{d}x &= \Big[x\ln(1+\tan x)\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} - \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \ln(1+\tan x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{4}\ln 2 - \frac{\pi}{8}\ln 2 \qquad \text{（小問 (iii) を用いた）} \\ &= \frac{\pi}{8}\ln 2.\end{aligned}$$

したがって、小問 (iv) の積分は小問 (iii) の積分と同じ値をもつ。

検算

- 小問 (i)：被積分関数は 0 から 1 まで増加し、点 $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2})$ に関して対称であるから、その平均値は $\frac{1}{2}$ であり、積分の値は区間の長さの半分 $\frac{1}{4}\pi$ となる。
- 小問 (ii) の値は小問 (i) の値の半分より小さいはずである。$[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上で被積分関数は $\frac{1}{2}$ より小さいからである。実際 $\frac{1}{8}\pi - \frac{1}{4}\ln 2 \approx 0.2194 < 0.3927$ である。
- 数値積分（numerical quadrature）（シンプソンの公式（Simpson's rule））によると、四つの小問の値は 0.785398、0.219412、0.272198、0.272198 となり、$\frac{1}{4}\pi$、$\frac{1}{8}\pi - \frac{1}{4}\ln 2$、$\frac{1}{8}\pi\ln 2$（2 回）と一致する。

よくある間違い

- 置換 $u = a - x$ によって積分の上端と下端が入れ替わることを忘れる。$\mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$ から生じる負号によって、それが再び入れ替わる。
- 小問 (ii) で、小問 (i) と同じように sin と cos を入れ替えようとする。$[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上の折り返しは $x \mapsto \frac{1}{4}\pi - x$ であって、$\frac{1}{2}\pi - x$ ではない。
- $\int \tan x \,\mathrm{d}x = \ln\cos x$ と書いてしまう。正しくは $-\ln\cos x$（あるいは $\ln\sec x$）である。

STEP のその先へ

小問 (iii) は古典的な問題である。同じ折り返しの手法によって、$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln\sin x \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\pi\ln 2$ のような積分を計算することができる。この積分は初等関数（elementary functions）で表される原始関数（antiderivative）からは求められない。大学では、こうした対称性による議論は、周回積分（contour integration）や積分記号下での微分（differentiation under the integral sign）と並んで、初等的な原始関数をもたない定積分（definite integrals）を求める道具として位置づけられる。STEP の精神に沿った例をさらに多く知りたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* を参照するとよい。置換積分や部分積分を正当化する解析学（analysis）については、Abbott, *Understanding Analysis* を参照のこと。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。