解答例

STEP II 2016、第 6 問

純粋数学 ・ チェビシェフ多項式の方程式

> **STEP II 2016、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q6

鍵となる考え方

どの小問も、候補となる関数を微分方程式（differential equation）に代入し、$x = 1$ における条件を確かめるだけで済む。あとは一意性（uniqueness）の仮定がすべてを片づけてくれる。(iii) と (iv) のコツは、y_n を決して具体的に展開しようとしないこと（そもそも明示的な形はわかっていない）、そして方程式 $(1 - x^2)y_n'^2 = n^2(1 - y_n^2)$ そのものを使って導関数を消去することである。

解答

以下を通して、y_k は

$$(1 - x^2)(y_k'(x))^2 = k^2(1 - y_k(x)^2), \qquad y_k(1) = 1,$$

を満たす。これは $(*)$ を変形しただけのものである。ある関数が y_k に等しいことを示すには、（仮定された一意性により）その関数がその k の値に対して $(*)$ を満たし、かつ $x = 1$ で値 1 をとることを示せば十分である。

小問 (i)

$k = 1$ のとき、方程式は

$$(1 - x^2)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + y^2 = 1.$$

となる。$y = x$ とすると $y' = 1$ であり、左辺は $(1 - x^2) + x^2 = 1$ となって条件を満たす。また $y(1) = 1$ であるから、$y_1(x) = x$ である。

小問 (ii)

$k = 2$ のとき、方程式は

$$(1 - x^2)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 4y^2 = 4.$$

となる。$y = 2x^2 - 1$ とすると $y' = 4x$ であるから、

$$\begin{aligned}(1 - x^2)(4x)^2 + 4(2x^2 - 1)^2 &= 16x^2 - 16x^4 + 16x^4 - 16x^2 + 4 \\ &= 4.\end{aligned}$$

$y(1) = 2 - 1 = 1$ であるから、$y_2(x) = 2x^2 - 1$ を得る。

小問 (iii)

簡単のため $y = y_n(x)$ と書く。$z = 2y^2 - 1$ を合成関数の微分法（chain rule）で微分すると $z' = 4yy'$ となるから、y_n の方程式を用いて

$$(1 - x^2)z'^2 = 16y^2\,(1 - x^2)y'^2 = 16y^2 \cdot n^2(1 - y^2),$$

を得る。また

$$4n^2z^2 = 4n^2(2y^2 - 1)^2 = 4n^2(4y^4 - 4y^2 + 1).$$

である。これらを足し合わせると

$$(1 - x^2)z'^2 + 4n^2z^2 = 16n^2y^2 - 16n^2y^4 + 16n^2y^4 - 16n^2y^2 + 4n^2 = 4n^2,$$

となり、求める方程式が得られる。

考えてみよう この方程式は y_{2n} とどう関係しているだろうか？

$(2n)^2 = 4n^2$ であるから、これはちょうど $k = 2n$ のときの $(*)$ である。さらに $z(1) = 2y_n(1)^2 - 1 = 2 - 1 = 1$ である。したがって z は $k = 2n$ のときの $(*)$ の解で、$x = 1$ において値 1 をとる。よって一意性により

$$y_{2n}(x) = 2(y_n(x))^2 - 1.$$

である。検算として、$n = 1$ とすると $y_2 = 2x^2 - 1$ となって (ii) と一致し、$n = 2$ とすると $y_4 = 2(2x^2 - 1)^2 - 1 = 8x^4 - 8x^2 + 1$ を得る。

小問 (iv)

$u = y_m(x)$ とおくと、$v = y_n(u)$ である。合成関数の微分法により

$$v'(x) = y_n'(u)\,y_m'(x).$$

である。したがって、まず（点 x における）y_m の方程式を、次に（点 u における）y_n の方程式を用いると、

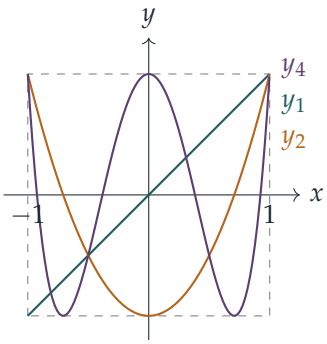
$$\begin{aligned}(1-x^2)v'^2 &= y_n'(u)^2\,(1-x^2)y_m'(x)^2\\ &= y_n'(u)^2\cdot m^2(1-u^2)\\ &= m^2\,(1-u^2)y_n'(u)^2\\ &= m^2\cdot n^2(1-y_n(u)^2) = m^2n^2(1-v^2).\end{aligned}$$

となる。よって $(1-x^2)v'^2+(mn)^2v^2=(mn)^2$ であり、これは $k=mn$ のときの $(*)$ である。最後に

$$v(1)=y_n(y_m(1))=y_n(1)=1,$$

であるから、一意性により $v(x)=y_{mn}(x)$ となり、示すべきことが示された。

y_n の方程式は x ではなく点 u において適用している。この方程式は変数のすべての値で成り立つので、x の代わりに u を入れて使ってよいのである。(iv) を成り立たせているのはこの一歩である。



3 本の曲線はいずれも $(1,1)$ を通り、$[-1,1]$ 上では -1 と 1 の間にとどまる。これは方程式から必然的に従うことである。実際、そこでは $(1-x^2)y'^2\geq 0$ であるから、$k^2y^2\leq k^2$ となる。

検算

- 小問 (iii) で $n=2$ とすると $y_4(x)=8x^4-8x^2+1$ が予測される。直接代入すると、$y_4'=32x^3-16x$ であり、$(1-x^2)(32x^3-16x)^2+16(8x^4-8x^2+1)^2$ は整理すると 16 になる。$x=0.3$ のとき、$y_4=0.3448$ である。
- 小問 (iv) で $m=n=2$ とすると、$y_2(y_2(x))=2(2x^2-1)^2-1$ となり、(iii) から得られたものと同じ y_4 になる。当然そうでなければならない。

- コンピュータによる検証で、このようにして作った多項式が 24 以下のすべての k について $(*)$ を満たすこと、および $m, n \leq 4$ について $y_n(y_m(x)) = y_{mn}(x)$ が成り立つことを、厳密な有理数演算で確かめた。

よくある間違い

- $x = 1$ における条件を忘れる。$(*)$ を満たすだけでは不十分である。$-y_k$ も $(*)$ を満たすからである。
- (iii) や (iv) で y_n を具体的に展開しようとする。y_n について明示的なことは何もわかっていない。その微分方程式を使って $(1 - x^2)y_n'^2$ を置き換えよ。
- (iv) で、y_n の方程式を $u = y_m(x)$ ではなく x で使ってしまう。そうすると因子 $(1 - x^2)$ が誤った場所に現れる。

STEP のその先へ

関数 y_k はチェビシェフ多項式（Chebyshev polynomials）T_k である。$x = \cos\theta$ とおくと $(*)$ は $(\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta)^2 = k^2(1 - y^2)$ となり、その解は $y = \cos k\theta$ であるから、$T_k(\cos\theta) = \cos k\theta$ が成り立つ。すると小問 (iii) は倍角の公式（double-angle formula）そのものであり、小問 (iv) は $\cos\big(n(m\theta)\big) = \cos(mn\theta)$ を述べていることになる。ひとつ注意しておこう。仮定してよいとされた一意性は、実は厳密には正しくない。定数関数 $y = 1$ も $(*)$ と $y(1) = 1$ を満たすからである。この方程式のように導関数が符号を除いてしか定まらない方程式こそ、一意性定理（uniqueness theorem）の扱いに注意が必要な場面である。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）では、解の存在と一意性（existence and uniqueness）が論じられている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。