解答例

STEP II 2016、第 5 問

純粋数学 ・ 二項係数の恒等式

> **STEP II 2016、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q5

鍵となる考え方

3 つの恒等式（identity）はすべて、ひとつの工夫から導かれる。すなわち、ある関数を 2 通りの積として表し、x のある 1 つの冪の係数（coefficient）を比較するのである。添字の和が一定であるような二項係数（binomial coefficient）の積の和は、2 つの冪級数（power series）を掛け合わせてその 1 つの係数を読み取ったときに得られるものにほかならない。問題文の「$p \geq q \geq 0$ でないときは $\binom{p}{q} = 0$ とする」という約束のおかげで、どの項が存在するかを気にせずに、和を j のすっきりした範囲でとることができる。

解答

小問 (i)

$|x| < 1$ のとき、二項級数（binomial series）により、$(1-x)^{-N}$ における x^n の係数は

$$\frac{(-N)(-N-1)\cdots(-N-n+1)}{n!}(-1)^n = \frac{N(N+1)\cdots(N+n-1)}{n!} = \frac{(N+n-1)!}{n!\,(N-1)!} = \binom{N+n-1}{n}.$$

となる。各因数から出る n 個の負号が、$(-x)^n$ から出る n 個の負号と打ち消し合う。したがって

$$(1-x)^{-N} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{N+n-1}{n} x^n \qquad (|x| < 1).$$

である。（$n = 0$ のとき係数は $\binom{N-1}{0} = 1$ である。$N \geq 1$ なので、これで問題ない。）

さて、$(1-x)^{-1}(1-x)^{-N} = (1-x)^{-(N+1)}$ である。上の展開で N を $N+1$ に置き換

えると、右辺における x^n の係数は $\binom{N+n}{n}$ である。

左辺では、$(1-x)^{-1} = \sum_{i\geq 0} x^i$ の係数はすべて1である。$(1-x)^{-N}$ の項 x^j は $(1-x)^{-1}$ の x^{n-j} と組になり、j は0から n までを動く。よって積における x^n の係数は

$$\sum_{j=0}^{n} 1 \cdot \binom{N+j-1}{j}.$$

である。両方の冪級数は $|x| < 1$ で収束（converge）し、そこで同じ関数を表すので、係数は一致する。これより

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{N+j-1}{j} = \binom{N+n}{n},$$

が示された。

小問 (ii)

$(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n$ を用いる。ここで3つとも多項式（polynomial）である。問題文の約束により

$$(1+x)^m = \sum_{j\geq 0} \binom{m}{j} x^j, \qquad (1+x)^n = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} x^k,$$

と書ける。$j > m$ や $k > n$ の係数は0だからである。積における x^r の係数は $j+k=r$ となる組、すなわち $0 \leq j \leq r$ で $k = r-j$ となる組から得られる：

$$\sum_{j=0}^{r} \binom{m}{j}\binom{n}{r-j}.$$

考えてみよう $j > m$ や $r-j > n$ となる項はどうなるだろうか。そのような冪は多項式には現れない。

それらの項は、$j > m$ である因数 $\binom{m}{j}$ か、$r-j > n$ である因数 $\binom{n}{r-j}$ を含むので、約束により0である。これらは何も寄与せず、また実際の項どうしの積にも対応しないので、$0 \leq j \leq r$ にわたる和でちょうど正しい。$(1+x)^{m+n}$ における x^r の係数は $\binom{m+n}{r}$ である。等しい多項式は係数も等しいので

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{j=0}^{r} \binom{m}{j}\binom{n}{r-j}.$$

である。

小問 (iii)

因数 $(-1)^j\binom{m+j-1}{j}$ を見ると、小問 (i) で x を $-x$ に置き換えればよいと気づく。小問 (i) の展開で x を $-x$ に、N を m に置き換えると

$$(1+x)^{-m} = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{m+j-1}{j}x^j \qquad (|x|<1).$$

となる。

考えてみよう どのような積を用いればよいだろうか。

もう一方の因数 $\binom{N+m}{n-j}$ は $(1+x)^{N+m}$ の係数であり、答えの $\binom{N}{n}$ は $(1+x)^N$ の係数である。m は正の整数なので、$|x|<1$ のとき

$$(1+x)^{N+m}\,(1+x)^{-m} = (1+x)^N.$$

が成り立つ。左辺では、($k > N+m$ に対する約束を用いて) $(1+x)^{N+m} = \sum_{k\geq 0}\binom{N+m}{k}x^k$ である。x^n の係数は、$0 \leq j \leq n$ について、$(1+x)^{-m}$ の x^j と $(1+x)^{N+m}$ の x^{n-j} の積から得られる：

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{N+m}{n-j}(-1)^j\binom{m+j-1}{j}.$$

右辺では、$(1+x)^N$ における x^n の係数は $\binom{N}{n}$ である。$n > N$ のときこれは約束により 0 であり、$(1+x)^N$ の次数は N なので、これも正しい。両辺は $|x|<1$ で等しいので、冪級数の係数は一致する：

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{N+m}{n-j}\binom{m+j-1}{j} = \binom{N}{n}.$$

検算

- 小問 (i) で $N=2$、$n=3$ のとき：$1+2+3+4 = 10 = \binom{5}{3}$。
- 小問 (ii) で $m=n=2$、$r=2$ のとき：$1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 1\cdot 1 = 6 = \binom{4}{2}$。
- 小問 (iii) で $m=2$、$N=3$、$n=2$ のとき：$\binom{5}{2}\binom{1}{0} - \binom{5}{1}\binom{2}{1} + \binom{5}{0}\binom{3}{2} = 10 - 10 + 3 = 3 = \binom{3}{2}$。$n > N$ のときは交代和が 0 になるはずである。たとえば $m=1$、$N=1$、$n=2$ とすると $\binom{2}{2} - \binom{2}{1} + \binom{2}{0} = 1 - 2 + 1 = 0$ となる。

3 つの恒等式はすべて、$m, N \leq 9$ かつ $n \leq 24$ のすべての場合について、コンピュータでも確かめてある。

よくある間違い

- $(1-x)^{-N}$ の係数で符号を見失うこと。$(-1)^n$ が 2 組あり、それらは打ち消し合う。
- 小問 (iii) で、$(1+x)^{-m}$ の級数が無限級数であり、$|x|<1$ でしか成り立たないことを忘れること。係数を比較してよいのは、ある区間で一致する 2 つの冪級数は同じ係数をもつからである。

STEP のその先へ

これは**母関数**（generating functions）の方法である。数列を冪級数の係数として符号化すると、級数の積はここで見たような畳み込み（convolution）の和になる。小問 (ii) はヴァンデルモンド（Vandermonde）の恒等式であり、小問 (i) はしばしばホッケースティック恒等式（hockey-stick identity）とよばれる。どちらにも見事な数え上げによる証明があり、探してみる価値がある。Wilf の *generatingfunctionology*（オンラインで無料公開）や、Graham、クヌース（Knuth）、Patashnik による *Concrete Mathematics*（邦訳『コンピュータの数学』）では、この道具立てがさらに深く展開されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。