解答例

# STEP II 2016、第 4 問

純粋数学 ・ 分数関数の値域

> **STEP II 2016、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q4

## 鍵となる考え方

分母を払うと、$y$ の定義式は $x$ についての二次方程式（quadratic equation）になり、「$x$ が実数である」という条件は「判別式（discriminant）が非負である」という条件に言い換えられる。$\theta$ を消去するには、すべての $\theta$ に対して成り立つ $y\cos\theta - \sin\theta$ の上界（upper bound）が必要である。これを $(y, -1)$ と単位ベクトル（unit vector）$(\cos\theta, \sin\theta)$ の内積（dot product）とみなすと、ちょうど $\sqrt{y^2+1}$ が得られる。小問 (ii) では、不等式の連鎖のすべてが等号で成り立たなければならず、そのことから $x$ と $\theta$ の両方が決まる。

## 解答

### 小問 (i)

まず、分母が決して 0 にならないことに注意する。$x$ の二次式とみると、$x^2 + x\cos\theta + 1$ の判別式は $\cos^2\theta - 4 < 0$ であるから、この式はつねに正である。したがって、両辺に分母を掛けても問題はない。

$$y(x^2 + x\cos\theta + 1) = x^2 + x\sin\theta + 1 \iff (y-1)x^2 + (y\cos\theta - \sin\theta)\,x + (y-1) = 0.$$

$y \neq 1$ のとき、これは $x$ についての真の二次方程式であり、実数解 $x$ をもつための必要十分条件は判別式が非負であることである。

$$(y\cos\theta - \sin\theta)^2 - 4(y-1)^2 \geq 0.$$

$y = 1$ のとき、示すべき不等式は $(\cos\theta - \sin\theta)^2 \geq 0$ となり、これはいずれにせよ成り立つ。よって、$x$ が実数ならば

$$(y\cos\theta - \sin\theta)^2 \geq 4(y-1)^2,$$

となり、示された。

**考えてみよう** どうすれば $\theta$ を消去できるだろうか。$(y\cos\theta - \sin\theta)^2$ 以上であって、$\theta$ によらないものが欲しい。

式 $y\cos\theta - \sin\theta$ は $(y, -1)$ と単位ベクトル $(\cos\theta, \sin\theta)$ の内積であるから、その絶対値は高々 $|(y,-1)| = \sqrt{y^2+1}$ である。同じことであるが、コーシー＝シュワルツの不等式（Cauchy–Schwarz inequality）により、あるいは直接

$$(y^2+1)(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - (y\cos\theta - \sin\theta)^2 = (y\sin\theta + \cos\theta)^2 \geq 0,$$

から、$(y\cos\theta - \sin\theta)^2 \leq y^2 + 1$ が得られる。これを最初の結果と組み合わせると

$$y^2 + 1 \geq (y\cos\theta - \sin\theta)^2 \geq 4(y-1)^2,$$

となり、これが二つ目の不等式である。

展開すると $y^2 + 1 \geq 4y^2 - 8y + 4$、すなわち

$$3y^2 - 8y + 3 \leq 0.$$

$3y^2 - 8y + 3 = 0$ の解は $y = \dfrac{8 \pm \sqrt{64-36}}{6} = \dfrac{4 \pm \sqrt{7}}{3}$ であり、この二次式は最高次の係数が正であるから、値が正でないのはちょうど二つの解の間である。よって

$$\frac{4-\sqrt{7}}{3} \leq y \leq \frac{4+\sqrt{7}}{3}.$$

**小問 (ii)**

$y = \frac{1}{3}(4+\sqrt{7})$ とおくと、$y - 1 = \frac{1}{3}(1+\sqrt{7}) > 0$ である。このとき

$$y^2 + 1 = \frac{16 + 8\sqrt{7} + 7}{9} + 1 = \frac{32 + 8\sqrt{7}}{9},$$
$$4(y-1)^2 = \frac{4(1 + 2\sqrt{7} + 7)}{9} = \frac{32 + 8\sqrt{7}}{9}.$$

両者は等しく、また $2(y-1) > 0$ であるから、正の平方根をとって $\sqrt{y^2+1} = 2(y-1)$ が得られ、示された。（当然である。$y$ は $3y^2 - 8y + 3 = 0$ の解であり、この方程式は $y^2 + 1 = 4(y-1)^2$ にほかならない。）

**考えてみよう** この等式は、小問 (i) の不等式の連鎖について何を教えてくれるだろうか。

連鎖 $y^2+1 \geq (y\cos\theta-\sin\theta)^2 \geq 4(y-1)^2$ の両端が等しくなったので、二つの不等式はいずれも等号で成り立つ。

判別式が零であるから、$x$ の二次方程式は重解（repeated root）

$$x = -\frac{y\cos\theta-\sin\theta}{2(y-1)}.$$

をもつ。

$\theta$ に関する評価で等号が成り立つから、$y\sin\theta+\cos\theta=0$ であり、

$$\tan\theta = -\frac{1}{y} = -\frac{3}{4+\sqrt{7}} = -\frac{3(4-\sqrt{7})}{16-7} = \frac{\sqrt{7}-4}{3}.$$

を得る。(ここで $\cos\theta\neq 0$ である。そうでなければ $\sin\theta=0$ ともなってしまうからである。)さらに $(y\cos\theta-\sin\theta)^2 = y^2+1 = 4(y-1)^2$ であるから、$y\cos\theta-\sin\theta = \pm 2(y-1)$ となり、したがって

$$x = \mp 1.$$

具体的には、$(\cos\theta,\sin\theta)$ は $(y,-1)$ と平行である。同じ向きのとき、すなわち $\cos\theta>0$ かつ $\sin\theta<0$ のとき、$y\cos\theta-\sin\theta=+2(y-1)$ であり $x=-1$ となる。逆向きのとき、すなわち $\cos\theta<0$ かつ $\sin\theta>0$ のとき、$x=1$ となる。いずれの場合も

$$x=\pm 1, \qquad \tan\theta = \frac{\sqrt{7}-4}{3}.$$

である。この二つの場合は実は一つのものである。$x$ を $-x$ に、$\theta$ を $\theta+\pi$ に置き換えても $y$ は変わらないからである。

## 検算

- $x=1$ のとき、式は $y=\dfrac{2+\sin\theta}{2+\cos\theta}$ となる。$\tan\theta=\frac{1}{3}(\sqrt{7}-4)\approx -0.4514$ を満たす $\theta$ を第 2 象限にとると $\theta\approx 2.7176$ であり、このとき $y\approx 2.21525$ となって、$\frac{1}{3}(4+\sqrt{7})\approx 2.21525$ と一致する。
- コンピュータで実数 $x$ と $\theta$ を無作為に多数選んで調べたところ、$y$ の値は 0.45142 と 2.21524 の間に収まり、上下の限界 $\frac{1}{3}(4\mp\sqrt{7})\approx 0.451416$ および 2.215250 のわずかに内側にとどまった。
- 注目すべきうまい一致がある。$\tan\theta=-\frac{1}{3}(4-\sqrt{7})$ は下限の符号を変えたものである。これは二つの限界が互いに逆数になっている（積が $\frac{1}{9}(16-7)=1$ である）からである。

## よくある間違い

- $y = 1$ の場合を忘れること。このとき $x$ の方程式は二次方程式ではなく、判別式による議論はそのままでは使えない。
- $\sqrt{y^2+1} = -2(y-1)$ としてしまったり、符号を確認しなかったりすること。ここで正の平方根が正しいのは、$y > 1$ だからにすぎない。
- $x$ の値を一つしか答えないこと。$x = 1$ と $x = -1$ のどちらも現れ、それぞれ $\theta$ は異なる象限にある。

## STEP のその先へ

$(y\cos\theta - \sin\theta)^2 \leq (y^2+1)(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$ という段階は、コーシー＝シュワルツの不等式 $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|$ の二次元の場合であり、等号が成り立つのはちょうど二つのベクトルが平行なときである。この不等式はあらゆる内積空間（inner-product space）で成り立ち、大学 1 年次の解析学（analysis）と線形代数（linear algebra）で最もよく使われる道具の一つである。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）はこれを幾何的に展開しており、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学を理解する）は解析学の中でこの不等式が活躍する様子を示している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。