解答例

STEP II 2016、第 3 問

純粋数学 • 多項式の根

> **STEP II 2016、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q3

鍵となる考え方

すべては一つの恒等式（identity）$\mathrm{f}_n(x) = \mathrm{f}_{n-1}(x) + \dfrac{x^n}{n!}$ にかかっている。これを小問 (i) と組み合わせると、f_n の根（root）a における傾きは $\mathrm{f}_n'(a) = -a^n/n!$ となる。つまり、根そのものを知らなくても、すべての根における傾き（gradient）がわかるのである。すべての根は同じ符号をもつので、それらの傾きもすべて同じ符号をもつ。そして曲線は、間で下向きに横切ることなく、続けて二度上向きに軸を横切ることはできない。

解答

以下、$\mathrm{f}_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ と書く。

小問 (i)

項ごとに微分すると、定数項 1 は消え、$1 \le k \le n$ に対して

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^k}{k!}\right) = \frac{kx^{k-1}}{k!} = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}.$$

となる。したがって

$$\mathrm{f}_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^j}{j!} = \mathrm{f}_{n-1}(x),$$

であり、これが示すべきことであった。

小問 (ii)

$x \geq 0$ ならば、$\mathrm{f}_n(x)$ のすべての項は非負であり、最初の項は 1 であるから、$\mathrm{f}_n(x) \geq 1 > 0$ である。よって $a \geq 0$ を満たす根は存在せず、実数の根はすべて $a < 0$ を満たす。($n = 0$ のときは $\mathrm{f}_0 = 1$ であって根は一つもなく、これと矛盾しない。)

小問 (iii)

定義より $\mathrm{f}_n(x) = \mathrm{f}_{n-1}(x) + \dfrac{x^n}{n!}$ である。$\mathrm{f}_n(a) = 0$ ならば、小問 (i) により

$$\mathrm{f}_n'(a) = \mathrm{f}_{n-1}(a) = \mathrm{f}_n(a) - \frac{a^n}{n!} = -\frac{a^n}{n!},$$

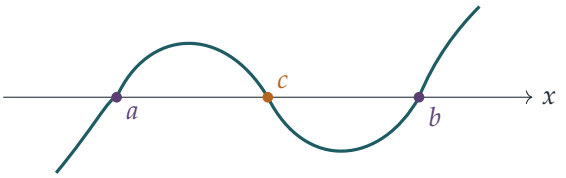
であり、同様に $\mathrm{f}_n'(b) = -b^n/n!$ である。したがって

$$\mathrm{f}_n'(a)\,\mathrm{f}_n'(b) = \frac{(ab)^n}{(n!)^2} > 0,$$

となる。小問 (ii) より $a < 0$ かつ $b < 0$ であるから $ab > 0$ だからである。これが求める不等式である。特に、どちらの傾きも 0 ではなく、両者は同じ符号をもつ。

> **考えてみよう** 二つの傾きの符号が等しいと、なぜその間に別の根が存在しなければならないのだろうか。

$a < b$ とし、両方の傾きが正であると仮定する（負の場合は鏡像である）。$\mathrm{f}_n'(a) > 0$ であるから、曲線は a で軸を上向きに横切り、a より少し大きい x に対して $\mathrm{f}_n(x) > 0$ となる。$\mathrm{f}_n'(b) > 0$ であるから、曲線は b でも上向きに横切り、b より少し小さい x に対して $\mathrm{f}_n(x) < 0$ となる。ある点で正、それより後の点で負となる連続関数は、その間で 0 にならなければならない（中間値の定理（intermediate value theorem））。よって、$a < c < b$ を満たすある c に対して $\mathrm{f}_n(c) = 0$ である。



曲線は a を上昇しながら通過し、b も上昇しながら通過するので、その間のどこかで軸を下向きに横切らなければならない。

実数の根は高々一つ。 $(*)$ が二つ以上の相異なる実数の根をもつと仮定する。これは n 次の多項式（polynomial）であるから根は有限個であり、その中から**隣り合う**二つ、すなわち間に根をもたない $a < b$ を選ぶことができる。ところが上の議論により、a と b の間に根 c が存在することになり、矛盾である。よって $(*)$ の実数の根は高々一つで

ある。（この議論では問題文どおり $n \geq 2$ を用いた。$n = 1$ のとき根は -1 のみであり、$n = 0$ のときは根がないので、結論はすべての n について成り立つ。）

n が奇数の場合。 このとき f_n は奇数次で、最高次の係数（leading coefficient）$1/n!$ は正であるから、$x \to -\infty$ のとき $\mathrm{f}_n(x) \to -\infty$、$x \to +\infty$ のとき $\mathrm{f}_n(x) \to +\infty$ である。中間値の定理により、少なくとも一つの実数の根をもち、したがって**ちょうど一つ**の実数の根をもつ。

n が偶数の場合。 $n = 0$ のときは根がない。偶数 $n \geq 2$ に対しては、$x \to \pm\infty$ のとき $\mathrm{f}_n(x) \to +\infty$ であるから、f_n はある点 x_0 で最小値（global minimum）をとり、そこで $\mathrm{f}_n'(x_0) = \mathrm{f}_{n-1}(x_0) = 0$ である。$\mathrm{f}_{n-1}(0) = 1 \neq 0$ であるから $x_0 \neq 0$ であり、したがって

$$\mathrm{f}_n(x_0) = \mathrm{f}_{n-1}(x_0) + \frac{x_0^n}{n!} = \frac{x_0^n}{n!} > 0,$$

となる。n が偶数だからである。最小値が正であるから、すべての x に対して $\mathrm{f}_n(x) > 0$ であり、$(*)$ は**実数の根をもたない**。

（別解：根 a があれば、$\mathrm{f}_n'(a) \neq 0$ であるからそれは単根（simple root）であり、f_n はそこで符号を変える。しかし、最高次の係数が正の偶数次多項式がちょうど一回だけ符号を変えるとすると、十分大きなすべての x で負になるか、十分小さな（負で絶対値の大きな）すべての x で負になるかのどちらかでなければならず、これは不可能である。）

検算

- $n = 1$：$1 + x = 0$ はただ一つの根 -1 をもつ。$n = 2$：$1 + x + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}\big((x+1)^2 + 1\big) > 0$ であり、根はない。どちらも結論に合う。
- $n = 3$：根はおよそ -1.596 であり、そこで $\mathrm{f}_3'(a) = \mathrm{f}_2(a) \approx 0.678 = -a^3/3!$ となり、予想どおりである。
- $n \leq 25$ のすべての n について f_n の符号変化をコンピュータで調べたところ、奇数の n ではちょうど一つの根、偶数の n では根なしという結果が得られた。

よくある間違い

- 傾きの積が正であることを示す際に、**なぜ** $ab > 0$ なのかを述べないこと。これには小問 (ii) が必要である。
- 任意の二つの根の間に根があることから、二つの根を隣り合うものとして選ばずに「根は高々一つ」と結論すること。その選び方こそが矛盾を生むのである。

- 偶数の n について、$x_0 \neq 0$ の確認を忘れること。これは $x_0^n/n! > 0$ が狭義の不等式となるために必要である。

STEP のその先へ

多項式 f_n は e^x のテイラー多項式（Taylor polynomial）であり、小問 (i) は $(e^x)' = e^x$ の有限版の影である。e^x は決して 0 にならないので、f_n の実数の根が少ないのは自然なことである。その複素数の根を $1/n$ 倍に縮小すると、$n \to \infty$ のとき、セゲー曲線（Szegő curve）と呼ばれる曲線の上に集まっていく。ここで用いた道具、すなわち中間値の定理と連続関数の最小値の存在は、解析学の最初の講義で厳密に証明される。Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。