解答例

STEP II 2016、第 2 問

純粋数学 ・ 因数定理

> **STEP II 2016、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q2

鍵となる考え方

$(*)$ を、係数にたまたま a と b を含む c の多項式（polynomial）とみなす。因数定理（factor theorem）によれば、$c-(a+b)$ が因数（factor）であるのは、$c=a+b$ を代入して 0 になるとき、かつそのときに限る。因数を一つ見つければ、$(*)$ の a, b, c に関する対称性（symmetry）から、さらに二つの因数がただちに得られ、次数（degree）を数えれば因数分解（factorisation）が完成する。二つの方程式は、実はこの恒等式の特別な場合を装ったものである。なすべきことは、それらに合うように a, b, c（後には d, e）を選ぶことである。

解答

因数 $a+b-c$

$(*)$ を $F(a,b,c)$ と書く。F を c の多項式とみなすと、F が因数 $c-(a+b)$、したがって $a+b-c$ をもつのは、$F(a,b,a+b)=0$ のとき、かつそのときに限る。$p=a+b$ とおき、$c=p$ とする。すると $a+b+c=2p$ であり、$a^2+b^2=p^2-2ab$ と $a^3+b^3=p^3-3abp$ を用いると、

$$a^2+b^2+c^2=2p^2-2ab, \qquad a^3+b^3+c^3=2p^3-3abp.$$

よって

$$\begin{aligned} F(a,b,a+b) &= 8p^3-6(2p)(2p^2-2ab)+8(2p^3-3abp) \\ &= 8p^3-24p^3+24abp+16p^3-24abp=0, \end{aligned}$$

となり、$a+b-c$ は $(*)$ の因数である。これが示すべきことであった。

$(*)$ を完全に因数分解する

F は a, b, c をどのように並べ替えても変わらない。b と c を入れ替えると因数 $a+b-c$ は $a+c-b$ に、a と c を入れ替えると $b+c-a$ になる。したがって

$$a+b-c, \qquad b+c-a, \qquad c+a-b$$

の三つはいずれも因数である。これらは互いに異なる一次式であり、どれも他の定数倍ではないので、その積は F を割り切る。F のどの項も次数 3 なので、残りの因数の次数は 0 である。すなわちそれは定数 k であり、

$$F(a,b,c) = k(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

k を求めるために $a=b=c=1$ とおく。左辺は $27-6\cdot3\cdot3+8\cdot3=-3$ であり、積は 1 である。よって $k=-3$ であり、

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 - 6(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) + 8(a^3+b^3+c^3)\\ = -3(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).\end{aligned}$$

小問 (i)

方程式の中央の項と最後の項を変形して、$(*)$ の形にそろえる。

$$(x+1)^3 - 6(x+1)\left(x^2+\tfrac{5}{2}\right) + 8\left(x^3+\tfrac{13}{4}\right) = 0.$$

考えてみよう どのような a, b, c をとれば、これはちょうど $(*)$ になるか。

$a=x$ とし、b, c を定数としてみる。必要な条件は

$$b+c=1, \qquad b^2+c^2=\tfrac{5}{2}, \qquad b^3+c^3=\tfrac{13}{4}.$$

はじめの二つから $2bc=(b+c)^2-(b^2+c^2)=-\tfrac{3}{2}$、よって $bc=-\tfrac{3}{4}$ である。すると

$$b^3+c^3=(b+c)^3-3bc(b+c)=1+\tfrac{9}{4}=\tfrac{13}{4},$$

となり、三つ目の条件は自動的に成り立つ。b, c は $t^2-t-\tfrac{3}{4}=0$、すなわち $(2t-3)(2t+1)=0$ の解であるから、$b=\tfrac{3}{2}, c=-\tfrac{1}{2}$ である。

$a=x, b=\tfrac{3}{2}, c=-\tfrac{1}{2}$ とすると、因数分解から

$$a+b-c=x+2, \qquad b+c-a=1-x, \qquad c+a-b=x-2,$$

となるので、方程式は $-3(x+2)(1-x)(x-2)=0$ であり、

$$x=-2, \quad x=1, \quad x=2.$$

小問 (ii)

4 変数の式を $G(a,b,d,e)$ と書く。($c=d+e$ とおくと $a+b-d-e$ は $a+b-c$ のように見え、これが因数を示唆する。しかし直接確かめても同じくらい速い。) 因数定理により、G を e の多項式とみなせば、$a+b=d+e$ のとき $G=0$ となることを示せば十分である。$p=a+b=d+e$ とおく。先ほどとまったく同様に $a^2+b^2=p^2-2ab$, $d^2+e^2=p^2-2de$, $a^3+b^3=p^3-3abp$, $d^3+e^3=p^3-3dep$ であるから、$q=ab+de$ とおくと

$$\begin{aligned} G &= (2p)^3-6(2p)(2p^2-2q)+8(2p^3-3pq) \\ &= 8p^3-24p^3+24pq+16p^3-24pq=0. \end{aligned}$$

よって $a+b-d-e$ は G の因数である。

さて、G は a,b,d,e をどのように並べ替えても変わらない。因数 $a+b-d-e$ は、四つの文字を組 $\{a,b\}$ と $\{d,e\}$ に分けることから生じる。二つずつの組に分ける残り二通りの分け方から、因数

$$a+d-b-e \quad (\text{入れ替え} b,d), \qquad a+e-b-d \quad (\text{入れ替え} b,e).$$

が得られる。これら三つの一次因数は互いに異なり、どれも他の定数倍ではない。また G は次数 3 の斉次式 (homogeneous polynomial) であるから、ある定数 k を用いて $G=k(a+b-d-e)(a+d-b-e)(a+e-b-d)$ と書ける。$a=1, b=d=e=0$ とおくと左辺は $1-6+8=3$、右辺は k となるので、

$$G=3(a+b-d-e)(a+d-b-e)(a+e-b-d).$$

方程式については、$a=x$ とし、定数 b,d,e を

$$b+d+e=6, \qquad b^2+d^2+e^2=14, \qquad b^3+d^3+e^3=36.$$

を満たすようにとる。数 1, 2, 3 がこれを満たす。実際 $1+2+3=6$, $1+4+9=14$, $1+8+27=36$ である。よって $a=x, b=1, d=2, e=3$ とすると、方程式はちょうど $G=0$ となり、これは

$$3(x+1-2-3)(x+2-1-3)(x+3-1-2)=3(x-4)(x-2)x=0.$$

と因数分解される。したがって

$$x=0, \quad x=2, \quad x=4.$$

検算

- $(*)$ に $a=b=1, c=2$ を代入すると $64-6\cdot4\cdot6+8\cdot10=0$ となり、因数 $a+b-c$ から予想されるとおりである。

- (i) で $x = 1$ とすると $8 - 3 \cdot 2 \cdot 7 + 2 \cdot 17 = 8 - 42 + 34 = 0$ となる。
- (ii) で $x = 0$ とすると $216 - 6 \cdot 6 \cdot 14 + 8 \cdot 36 = 216 - 504 + 288 = 0$、$x = 4$ とすると $1000 - 6 \cdot 10 \cdot 30 + 8 \cdot 100 = 0$ となる。
- これらの因数分解は、変数に数千組のランダムな有理数の値を代入して、コンピュータでも確認した。

よくある間違い

- 定数を忘れること。$(*)$ は因数の積そのものではなく、その -3 倍である。都合のよい値を代入して、必ず k を決定すること。
- (ii) で因数を三つより多く挙げてしまうこと。たとえば a と d を入れ替えると $d + b - a - e$ が得られるが、これは $-(a + e - b - d)$ にすぎない。本当に異なる三つの因数は、四つの文字を二つずつ組にする三通りの方法から生じる。
- すべてを力ずくで展開すること。それでも解けるが、長く誤りやすい。方程式を恒等式に当てはめることこそが、この問題の眼目である。

STEP のその先へ

因数定理は任意の体（field）上で成り立つ。ここでは、一つを除くすべての変数を定数とみなすことで、多変数の多項式に対してこれを用いた。対称性と多項式の一意分解（unique factorisation）の組み合わせは強力である。対称式（symmetric polynomial）の理論によれば、どの対称式も基本対称式（elementary symmetric polynomials）$a + b + c$, $ab + bc + ca$, abc を用いて表すことができ、これが (i) における b, c の条件の背後に隠れている構造である。ちなみに、積 $(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$ は、三角形の面積を与えるヘロンの公式（Heron's formula）にまさに現れるものである。多項式環（polynomial ring）と因数分解についてさらに知りたければ、Allenby, *Rings, Fields and Groups*（環・体・群の入門書）を参照されたい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。