解答例

STEP II 2016、第 12 問

確率・統計 ・ 包除原理と完全順列

> **STEP II 2016、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q12

この問題は、*Beyond STEP* の第 9.8 節「誰も自分のシャツを受け取らない」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch09/derangements.html

鍵となる考え方

3 つの事象（event）については、$A \cup B$ を 1 つの事象とみなし、2 事象の公式を 2 回適用すればよい。同じ符号の交代するパターン（単独の確率を足し、2 つの共通部分を引き、3 つの共通部分を足し、...）は、事象がいくつあっても成り立つ。これを「カード i が位置 i にある」という事象に適用すると、r 個の事象を含む項はすべて同じ確率をもつので、和の各層は 1 つの分数にまとまる。「ちょうど 1 つ」については、どのカードが一致するかを固定し、残りのカードがまったく一致しない確率を考える。

解答

3 つの事象

$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$ と書き、A の代わりに $A \cup B$、B の代わりに C として 2 事象の公式を用いる：

$$\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = \mathrm{P}(A \cup B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}\big((A \cup B) \cap C\big).$$

第 1 項は $\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$ である。最後の項については、分配法則（distributive law）により $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ であり、2 事象の公式をもう一度適用す

ると

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\big((A\cap C)\cup(B\cap C)\big) &= \mathrm{P}(A\cap C)+\mathrm{P}(B\cap C)-\mathrm{P}\big((A\cap C)\cap(B\cap C)\big)\\ &= \mathrm{P}(A\cap C)+\mathrm{P}(B\cap C)-\mathrm{P}(A\cap B\cap C).\end{aligned}$$

両方を代入すると

$$\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(B\cap C)-\mathrm{P}(C\cap A)+\mathrm{P}(A\cap B\cap C),$$

となり、示すべき式が得られた。

4 つの事象

4 つの単独の確率を足し、6 つの 2 事象の共通部分を引き、4 つの 3 事象の共通部分を足し、4 事象の共通部分を引く：

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B\cup C\cup D) = {}& \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)+\mathrm{P}(D)\\ & -\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(A\cap C)-\mathrm{P}(A\cap D)\\ & -\mathrm{P}(B\cap C)-\mathrm{P}(B\cap D)-\mathrm{P}(C\cap D)\\ & +\mathrm{P}(A\cap B\cap C)+\mathrm{P}(A\cap B\cap D)+\mathrm{P}(A\cap C\cap D)+\mathrm{P}(B\cap C\cap D)\\ & -\mathrm{P}(A\cap B\cap C\cap D).\end{aligned}$$

小問 (i)–(iii)

$n!$ 通りの並べ方はすべて同様に確からしい。特定の r 枚のカードがそれぞれ自分の位置にあることを要求すると、残りの $n-r$ 枚の並べ方は $(n-r)!$ 通りなので、その確率は $(n-r)!/n!$ である。したがって

$$\text{(i) } \mathrm{P}(E_i)=\frac{1}{n},\qquad \text{(ii) } \mathrm{P}(E_i\cap E_j)=\frac{1}{n(n-1)},\qquad \text{(iii) } \mathrm{P}(E_i\cap E_j\cap E_k)=\frac{1}{n(n-1)(n-2)}.$$

（(ii) は次のように考えてもよい：カード i が位置 i に来る確率は $\frac{1}{n}$ であり、そのうえでカード j が残りの $n-1$ か所のうち位置 j に来る確率は $\frac{1}{n-1}$ である。）

少なくとも 1 つ一致する場合

少なくとも 1 枚のカードが一致するのは、$E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_n$ が起こるときであり、そのときに限る。上のパターンは n 個の事象に拡張できる：第 r 層は、相異なる r 個の事象のすべての共通部分の確率の和に $(-1)^{r+1}$ を掛けたものである。

考えてみよう r 個の事象のすべての選び方にわたる和を、それがどの事象かを知らずに計算するにはどうすればよいか？

対称性（symmetry）により、相異なる r 個の事象の共通部分はすべて同じ確率 $(n-r)!/n!$ をもち、r 個の事象の選び方は $\binom{n}{r}$ 通りある。よって第 r 層の寄与は

$$(-1)^{r+1}\binom{n}{r}\frac{(n-r)!}{n!} = (-1)^{r+1}\frac{n!}{r!\,(n-r)!}\cdot\frac{(n-r)!}{n!} = \frac{(-1)^{r+1}}{r!}.$$

$r = 1, 2, \ldots, n$ について和をとると

$$\mathrm{P}(\text{少なくとも 1 つ一致}) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!},$$

となり、示すべき式が得られた。（$r = 1, 2, 3$ の場合、これは小問 (i)–(iii) から得られる $n\cdot\frac{1}{n}$、$\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n(n-1)}$、$\binom{n}{3}\cdot\frac{1}{n(n-1)(n-2)}$ にほかならない。）

ちょうど 1 つ一致する場合

シャッフルした m 枚のカードのどれも自分の位置にない確率を p_m とおく。前の結果により

$$p_m = 1 - \left(1 - \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^{m+1}\frac{1}{m!}\right) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{m}\frac{1}{m!}.$$

事象「ちょうど 1 つ一致」は、事象「カード i が一致し、ほかのカードは一致しない」の i にわたる互いに素な（disjoint）和集合である。E_i が起こったという条件のもとで、ほかの $n-1$ 枚のカードはほかの $n-1$ か所にどの順にも同様に確からしく並ぶので、これは $n-1$ 枚のカードを新たにシャッフルしたものとなり、そのどれも一致しない確率は p_{n-1} である。したがって

$$\mathrm{P}(\text{ちょうど 1 つ一致}) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(E_i)\,p_{n-1} = n\cdot\frac{1}{n}\cdot p_{n-1} = p_{n-1},$$

すなわち

$$\mathrm{P}(\text{ちょうど 1 つ一致}) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!} \qquad (n \geq 2),$$

であり、$n = 1$ のときは 1 である。同値な表し方として、これは $\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r/r!$ であり、この形なら $n = 1$ の場合も含まれる。

検算

$n = 3$ のとき、並べ方は 123、132、213、231、312、321 である。そのうち 4 つが一致を含むので、確率は $\frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ となる。また 3 つ（互換 132、213、321）がちょうど 1 つの一致をもつので確率は $\frac{1}{2}$ となり、公式と一致する。$n = 2$ のとき、ちょうど 1 つ一致することは不可能であり（1 枚が自分の位置にあれば、もう 1 枚もそ

うである）、公式も 0 を与える。$n \leq 7$ についてすべての並べ方をコンピュータで数え上げると、両方の公式と一致する。たとえば $n = 7$ のとき、ちょうど 1 つ一致する確率は $\frac{53}{144} \approx 0.368$ である。$n \to \infty$ のとき、どちらの答えもよく知られた極限に収束（converge）する：少なくとも 1 つ一致する確率は $1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 0.632$ に、ちょうど 1 つ一致する確率は e^{-1} に収束する。

よくある間違い

- $\mathrm{P}(E_i \cap E_j) = \frac{1}{n^2}$ と書いてしまう：これらの事象は独立（independent）ではない。カード i が位置 i にあると、カード j のために残る位置は $n - 1$ か所しかないからである。
- 「ちょうど 1 つ」の答えを $n \cdot \frac{1}{n} = 1$ や $\mathrm{P}(E_1)$ としてしまう：必要なのは、カード i が自分の位置にあり、**かつ**ほかのどのカードも自分の位置にないことである。
- 「少なくとも 1 つ」の和で $r = 1$ の項が $n \cdot \frac{1}{n} = 1$ であることを忘れる。これが級数が 1 から始まる理由である。

STEP のその先へ

これは古典的な**撹乱順列**（*derangement*）の問題（*problème des rencontres*、出会いの問題）であり、一般の包除原理（inclusion–exclusion）の公式は、数学的帰納法（induction）や指示確率変数（indicator random variable）を用いてきれいに証明できる。一致の個数は、n が大きいとき平均 1 のポアソン（Poisson）分布で近似できることがわかる：ちょうど k 個一致する確率は $\mathrm{e}^{-1}/k!$ に収束する。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）、および Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率入門）は、いずれも包除原理と一致の問題を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。