解答例

STEP II 2016、第 11 問

力学 ・ 放物運動と衝突

> **STEP II 2016、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q11

鍵となる考え方

2 つの粒子が衝突するのは、同じ時刻に両方の座標が一致するときである。したがって、未知数 t を共有する 2 つの方程式が得られ、一方を他方で割れば t を消去できる。小問 (ii) のポイントは、重力が弾丸と標的をどの瞬間にもまったく同じ量 $\frac{1}{2}gt^2$ だけ引き下げることに気づくことである。したがって、両者が出会うかどうかは小問 (i) の重力のない運動によって決まり、重力が関係するのは、出会ったときに標的がどこにあるかを問うときだけである。

解答

小問 (i)

第 1 の粒子を P（$(a,0)$ から出発）、第 2 の粒子を Q（$(0,b)$ から出発）とする。時刻 t で衝突するとする。x 座標と y 座標をそれぞれ等しいとおくと、

$$\begin{aligned} a + ut\cos\alpha &= vt\cos\beta, & \text{よって} \quad t\left(v\cos\beta - u\cos\alpha\right) &= a, \\ ut\sin\alpha &= b + vt\sin\beta, & \text{よって} \quad t\left(u\sin\alpha - v\sin\beta\right) &= b. \end{aligned}$$

$a > 0$ であるから、第 1 式より $t \neq 0$ である（2 つの粒子は異なる点から出発する）。したがって $t > 0$ であり、第 2 式を第 1 式で割ることができる：

$$\frac{u\sin\alpha - v\sin\beta}{v\cos\beta - u\cos\alpha} = \frac{b}{a} = \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

（分母は $a/t \neq 0$ である。）分母を払うと

$$\cos\theta\left(u\sin\alpha - v\sin\beta\right) = \sin\theta\left(v\cos\beta - u\cos\alpha\right),$$

となり、u を含む項を左辺に、v を含む項を右辺にまとめると

$$u(\sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta)=v(\sin\beta\cos\theta+\cos\beta\sin\theta).$$

$\sin(A+B)$ の加法定理（compound-angle formula）により、これは

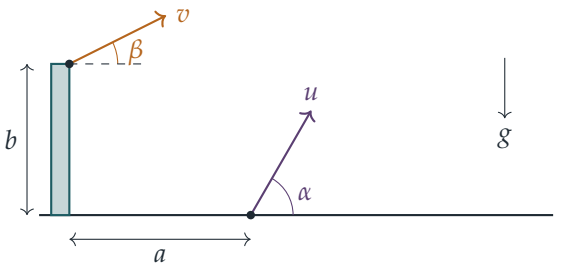
$$u\sin(\theta+\alpha)=v\sin(\theta+\beta),$$

となり、示すべき式が得られた。あとで使うために、次の 2 つの事実も記録しておく。$a,b,t>0$ であるから

$$v\cos\beta>u\cos\alpha \qquad \text{かつ} \qquad u\sin\alpha>v\sin\beta. \tag{$*$}$$

小問 (ii)

弾丸と標的を、空気抵抗なしで重力のみを受けて自由に運動する質点としてモデル化する。塔の根元を原点とし、標的の発射点を通る水平方向（塔から離れる向き）を x 軸、鉛直上向きを y 軸にとる。命中する可能性があるためには弾丸は標的の方向に発射されなければならないので、両者はこの鉛直面内を運動する。



時刻 t（どちらも着地する前）において、標的と弾丸の位置は

$$T=(a+ut\cos\alpha,\ ut\sin\alpha-\tfrac{1}{2}gt^2), \qquad B=(vt\cos\beta,\ b+vt\sin\beta-\tfrac{1}{2}gt^2).$$

である。これらはちょうど小問 (i) の位置を、それぞれ同じ量 $\frac{1}{2}gt^2$ だけ下にずらしたものである。

考えてみよう 小問 (i) には重力がなかったのに、なぜ小問 (i) を使えるのだろうか。

命中は $T=B$ のときに起こる。y 座標の方程式では項 $-\frac{1}{2}gt^2$ が両辺に現れて打ち消し合うので、衝突の条件は小問 (i) のものと一字一句同じになる：

$$t\,(v\cos\beta-u\cos\alpha)=a, \qquad t\,(u\sin\alpha-v\sin\beta)=b.$$

特に小問 (i) と $(*)$ がそのまま適用でき、命中の時刻は

$$t = \frac{b}{u\sin\alpha - v\sin\beta},$$

である。ここで分母は $(*)$ により正である。

この瞬間に標的がまだ空中にあるのは、その高さが正であるとき、かつそのときに限る：

$$ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2 > 0 \iff t < \frac{2u\sin\alpha}{g},$$

ここで $\frac{1}{2}t > 0$ で割った。命中の時刻を代入すると

$$\frac{b}{u\sin\alpha - v\sin\beta} < \frac{2u\sin\alpha}{g}.$$

両方の分母は正なので、$g(u\sin\alpha - v\sin\beta)$ を両辺に掛けても不等式（inequality）の向きは変わらず、

$$2u\sin\alpha\,(u\sin\alpha - v\sin\beta) > bg,$$

が得られ、示すべき式が得られた。（命中の瞬間、弾丸は標的と同じ高さにあるので、弾丸も地面より上にある。）

なぜ $\alpha > \beta$ が必要なのか

命中のためには、2 つの粒子が小問 (i) の意味で衝突しなければならないことを見た。したがって

$$u\sin(\theta+\alpha) = v\sin(\theta+\beta),$$

が成り立つ。ここで $\tan\theta = b/a$ であり、さらに $(*)$ より $u\sin\alpha > v\sin\beta$ である。θ、α、β は鋭角なので、$\theta+\alpha$ と $\theta+\beta$ は 0 と π の間（端点を除く）にあり、ここに現れる 4 つの正弦はすべて正である。等式を不等式で割ると向きが逆になる：

$$\frac{\sin(\theta+\alpha)}{\sin\alpha} < \frac{\sin(\theta+\beta)}{\sin\beta}.$$

展開すると $\dfrac{\sin(\theta+\alpha)}{\sin\alpha} = \sin\theta\cot\alpha + \cos\theta$ であり、β についても同様なので

$$\sin\theta\cot\alpha < \sin\theta\cot\beta \iff \cot\alpha < \cot\beta,$$

となる。ここで $\sin\theta > 0$ を用いた。$(0, \frac{\pi}{2})$ 上で余接（cotangent）は狭義単調減少であるから、$\alpha > \beta$ である。

物理的には次のように理解できる。弾丸から見ると、重力が打ち消し合うため、標的は一定の速度で直線運動をする。この相対速度（relative velocity）は標的の出発点 $(a, 0)$ から $(0, b)$ にある銃の方向を向いていなければならないので、後ろ向きかつ上向

きでなければならない。$(*)$ より、標的は弾丸と比べて水平方向には遅く、鉛直方向には速くなければならず、そのため標的の軌道はより急勾配、すなわち $\tan\alpha > \tan\beta$ でなければならない。（$(*)$ の 2 つの式を割り算しても、同じ結論が直接得られる。）

検算

$u = 20$、$\alpha = 60°$、$v = 15$、$\beta = 30°$ とし、$g = 9.8$ で $t = 1$ に命中する場合を考える。衝突の方程式から $a \approx 2.990$、$b \approx 9.821$ となるので、$\theta \approx 73.06°$ である。このとき $u\sin(\theta+\alpha) \approx 14.612$、$v\sin(\theta+\beta) \approx 14.612$ となり、一致する。命中の瞬間、標的の高さは $17.32 - 4.9 \approx 12.42 > 0$ であり、実際 $2u\sin\alpha(u\sin\alpha - v\sin\beta) \approx 340.2 > bg \approx 96.2$ が成り立つ。何千通りものランダムな発射条件についてコンピュータで確認したところ、この不等式が成り立つのは命中の瞬間に標的がまだ空中にあるとき、かつそのときに限ること、そしてすべての命中で $\alpha > \beta$ であることが確かめられた。

よくある間違い

- 2 つの粒子が同じ時刻に同じ場所にいなければならないことを忘れ、2 つの異なる時刻について解いてしまう。
- $u\sin\alpha - v\sin\beta$ が正であることを先に確かめずに、両辺に掛けてしまう。実際には $t > 0$ かつ $b > 0$ なので正である。
- $u\sin\alpha > v\sin\beta$ だけから $\alpha > \beta$ を導こうとする。速さも比較しない限り、この式は角度について何も教えてくれない。

STEP のその先へ

重力が打ち消し合うことは、ガリレイの相対性原理（Galilean relativity）の一例である。弾丸とともに自由落下する座標系では、標的は一定の速度で直線運動をするので、「標的をまっすぐ狙う」ことでうまくいく。これは古典的な「猿と狩人」の実験であり、慣性系（inertial frame、あるいは自由落下する座標系）の考え方は、大学 1 年の力学の出発点であり、さらに後には一般相対性理論（general relativity）における等価原理（equivalence principle）の出発点でもある。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、相対運動と座標系を丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。