解答例

STEP II 2016、第 10 問

力学 ・ 摩擦とつり合い

> **STEP II 2016、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q10

鍵となる考え方

三角形にはたらく力は二つしかない。重心（centre of mass）G にはたらく重力と、接触点 P で釘（peg）から受けるただ一つの接触力である。つり合っている二つの力は、大きさが等しく、向きが反対で、同一直線上になければならない。したがって三角形は、G が P の真下にくるまで回転する。すると問題は次のようになる。釘からの反力は BC の法線からどれだけ傾かなければならないか、そして摩擦はそれを支えるのに十分な強さをもつか。そこでまず G の位置を求める。

解答

モデルと重心

針金を単位長さあたりの質量が等しい三本の一様な棒とみなし、釘を一点で接触するものとみなす。釘は垂直抗力（normal reaction）R（BC に垂直）と摩擦力（friction force）F（BC に沿う向き）を及ぼし、$F \le \mu R$ である。

$AB = AC = b$ とし、BC の中点を M とする。A における角は 2θ であるから、直線 AM はこの角を二等分し、BC に垂直である。よって

$$BM = MC = b\sin\theta, \qquad AM = b\cos\theta, \qquad BC = 2b\sin\theta.$$

対称性より G は AM 上にある。BC から A に向かって距離を測る。棒 AB と AC はそれぞれ質量が b に比例し、その中心は中点にあって BC からの距離は $\frac{1}{2}b\cos\theta$ である。棒 BC は質量が $2b\sin\theta$ に比例し、その中心は BC 上にある。よって距離 $d = GM$ は

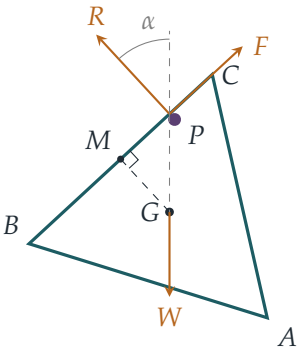
$$d = \frac{b\cdot\frac{1}{2}b\cos\theta + b\cdot\frac{1}{2}b\cos\theta + 2b\sin\theta\cdot 0}{b+b+2b\sin\theta} = \frac{b\cos\theta}{2(1+\sin\theta)}.$$

釘が一般の点にあるときのつり合い

釘が BC に点 P で接し、$MP = x$、ただし $0 \le x \le b\sin\theta$ であるとする（対称性より P は M と C の間にあるとしてよい）。三角形は釘の下にぶら下がっているので、釘は三角形の内側にあり、BC がその上に載っている。

> **考えてみよう** 三角形はどんな角度でもぶら下がりうる。実際にどの角度をとるかは、どうすればわかるだろうか。

三角形にはたらく力は、G における重力 W と、P における釘からの接触力の合力である。力が二つしかないので、つり合うためには両者が大きさ等しく向きが反対であること（したがって接触力は鉛直上向きに W）、そして同一直線上にはたらくこと（そうでなければ偶力（couple）になってしまう）が必要である。よって PG は鉛直でなければならない。すなわち三角形は、G が P の真下にくる位置で静止する。



PG（鉛直線）と BC の法線 GM のなす角を α とする。直角三角形 PMG において

$$\tan\alpha = \frac{MP}{GM} = \frac{x}{d}.$$

BC の法線は鉛直線と角 α をなし、BC は水平線と角 α をなす。BC に垂直な方向と BC に沿う方向に力を分解すると

$$R = W\cos\alpha, \qquad F = W\sin\alpha.$$

$0 \le \alpha < \frac{1}{2}\pi$ であるからどちらも非負であり、$R > 0$ である。三角形が滑らずに静止しているための条件は $F \le \mu R$、すなわち

$$\mu \ge \tan\alpha = \frac{x}{d}.$$

BC のすべての点

右辺 x/d は x について増加するので、この条件が最も厳しくなるのは P が端点にあるとき、つまり $x = b\sin\theta$ のときである。BC のすべての点でつり合いが可能であるこ

とは、そこでつり合いが可能であることと同値である。

$$\mu \geq \frac{b\sin\theta}{d} = b\sin\theta \cdot \frac{2(1+\sin\theta)}{b\cos\theta} = 2\tan\theta\,(1+\sin\theta),$$

これが求める条件である。これが成り立てば、$[0, b\sin\theta]$ のすべての x について $\mu \geq x/d$ となるので、釘が BC のどの点にあっても三角形は静止できる。

検算

- $x = 0$（釘が M にある）のとき $\alpha = 0$ となる。三角形は BC が水平な状態でぶら下がり、摩擦はまったく必要ない。対称性から期待されるとおりである。
- $\theta = 30^\circ$ のとき三角形は正三角形となり、$d = \frac{1}{3}b\cos 30^\circ$ である。このとき G は図形の重心、すなわち BC から高さ $b\cos 30^\circ$ の三分の一の位置にあるはずであり、実際そうなっている。条件は $\mu \geq 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2} = \sqrt{3} \approx 1.732$ となる。頂点では、BC は水平線と 60° をなさなければならない。
- $\theta \to 0$ のとき三角形は細いとげのようになり、BC は縮んで消え、上界は 0 に近づく。$\theta \to \frac{1}{2}\pi$ のときは細長い平らな帯のようになり、上界は発散する。どちらも直観に合う。
- コンピュータによる検算として、三本の棒を多数の小片に分けて G を求め、ランダムな θ と b に対して BC 上の 201 点で力を分解したところ、$2\tan\theta(1+\sin\theta)$ と 10^{-11} 以内で一致した。

よくある間違い

- **針金**の重心ではなく、三角形の**薄板**（lamina）の重心（AM の三分の一の高さ）を使ってしまう。針金の枠は質量が辺の上にあるので、BC は重み $2b\sin\theta$ として数える。
- BC が水平のままであると仮定し、モーメントをとろうとしてしまう。三角形は G が釘の真下にくるまで傾く。その傾きの角度こそ、摩擦が支えなければならないものである。
- BC の一点しか調べない。最も厳しいのは BC の端点の場合であり、それが上界を決める。

STEP のその先へ

$\tan\alpha \leq \mu$ と書くことは、接触力の合力が**摩擦円錐**（cone of friction）、すなわち法線のまわりの半頂角 $\arctan\mu$ の円錐の内側になければならない、ということを表している。この見方をすると、多くの摩擦の問題（はしご、くさび、粗い釘）がほとんど幾何の問題になる。さらにこれは接触点が複数ある剛体へと一般化され、そこでは各円錐の内側にある力をうまく選んで荷重とつり合わせられるかどうかが問題となる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、摩擦と剛体のつり合いをこのような丁寧さで扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。