解答例

STEP II 2016、第 1 問

純粋数学 • 媒介変数表示された曲線と接線

> **STEP II 2016、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q1

鍵となる考え方

座標ではなく媒介変数（parameter）で考える。O における直角という条件は、2 点の媒介変数 p と q の間のただ一つの非常に単純な関係式に変わり、また一般の点における接線（tangent）は t を用いたすっきりした方程式で表される。2 本の接線の交点を求めると、その座標は p と q の対称関数（symmetric function）として表され、p と q の間の関係式こそが、それらを消去するのにちょうど必要なものとなっている。

解答

一般の点における接線

媒介変数 t に対応する点において、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3t}{2} \qquad (t \neq 0).$$

よって (t^2, t^3) における接線は $y - t^3 = \frac{3t}{2}(x - t^2)$、すなわち

$$2y = 3tx - t^3. \qquad (*)$$

である。（$t = 0$ のときこれは $y = 0$ となり、尖点（cusp）における接線を与えるが、この点は以下では必要ない。）

直角の条件

$P = (p^2, p^3)$、$Q = (q^2, q^3)$ とする。$\angle POQ$ が意味をもつためには、どちらの点も O ではないので、$p \neq 0$ かつ $q \neq 0$ である。この角が直角となるのは、$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$ のと

き、かつそのときに限る：

$$p^2q^2 + p^3q^3 = p^2q^2(1+pq) = 0.$$

$p^2q^2 \neq 0$ であるから、

$$pq = -1.$$

が従う。特に $p \neq q$ である（積が負であるから）。したがって P と Q における接線の傾き（gradient）は $\frac{3p}{2} \neq \frac{3q}{2}$ と異なり、確かにただ 1 点で交わる。

接線の交点

$(*)$ で $t = p$ としたものと $t = q$ としたものの差をとると、

$$3(p-q)x = p^3 - q^3 = (p-q)(p^2+pq+q^2).$$

$p - q \neq 0$ で割り、$pq = -1$ を用いると、

$$3x = p^2 + pq + q^2 = p^2 + q^2 - 1.$$

これを $t = p$ とした $(*)$ に代入すると：

$$\begin{aligned} 2y &= p(p^2+pq+q^2) - p^3 \\ &= p^2q + pq^2 = pq(p+q) = -(p+q). \end{aligned}$$

> **考えてみよう** x と y が 2 つの媒介変数で表された。x と y だけの 1 つの方程式を得るにはどうすればよいか？

y を 2 乗する。現れる交差項 $2pq$ は既知の定数であり、残るのは $p^2 + q^2$ で、これはまさに $3x$ に含まれているものである。実際、

$$4y^2 = (p+q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq = p^2 + q^2 - 2 = (3x+1) - 2 = 3x - 1.$$

よって P と Q における接線は $C_2 \colon 4y^2 = 3x - 1$ 上で交わり、題意は示された。

（実は C_2 のすべての点が現れる。p が正の実数全体を動くとき、$2y = -(p+q) = \frac{1}{p} - p$ はすべての実数値をとり、そのとき x は C_2 の方程式によって定まる。）

C_1 と C_2 は交わるか？

C_2 の方程式に $x = t^2$、$y = t^3$ を代入すると：

$$4t^6 = 3t^2 - 1 \iff 4u^3 - 3u + 1 = 0, \quad \text{ただし} u = t^2 \geq 0.$$

明らかに $u=-1$ は解であり、因数 $u+1$ で割ると

$$4u^3-3u+1=(u+1)(4u^2-4u+1)=(u+1)(2u-1)^2.$$

を得る。$u\geq 0$ であるから、可能なのは $u=\frac{1}{2}$ のみであり、$t=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる。したがって 2 曲線は**確かに**交わり、交点はちょうど次の 2 点である。

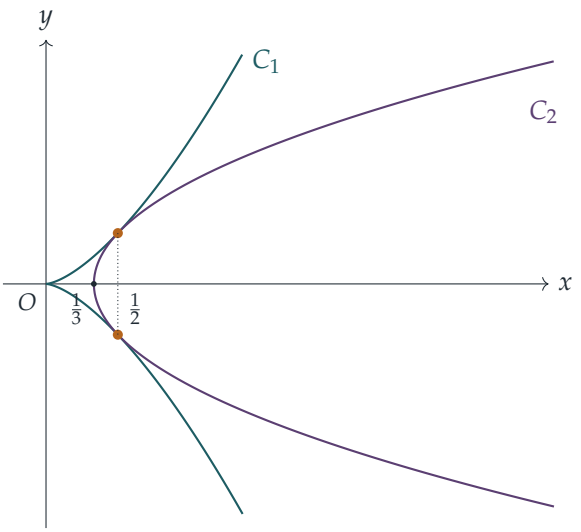
$$\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)\quad\text{および}\quad\left(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2\sqrt{2}}\right).$$

重解（repeated root）であることから、さらに多くのことがわかる。すなわち、2 曲線はそこで交差するのではなく接する（touch）のである。このことは直接確かめられる。$t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ において C_1 の傾きは $\frac{3t}{2}=\frac{3}{2\sqrt{2}}$ である。$4y^2=3x-1$ を陰関数微分（implicit differentiation）すると $8y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3$ となるので、$y=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ における C_2 の傾きは $\frac{3}{8y}=\frac{3}{2\sqrt{2}}$ であり、一致する。x 軸に関する対称性により、もう一方の点でも同じことが成り立つ。

$u\geq 0$ のとき $4u^3-3u+1=(u+1)(2u-1)^2\geq 0$ であるから、曲線 C_1 が放物線（parabola）の内側に入ることはない。すなわち、2 つの接点を除いて、C_2 は C_1 の 2 つの枝の間にある。

概形

C_1 は $y^2=x^3$ を満たす。C_1 は $x\geq 0$ の範囲にあり、x 軸に関して対称で、O に尖点をもつ（どちらの枝も傾きが $\frac{3t}{2}\to 0$ となるので、x 軸の正の向きに沿って O から出ていく）。C_2 は放物線 $x=\frac{1}{3}(4y^2+1)$ であり、頂点は $(\frac{1}{3},0)$、右に開いていて、やはり x 軸に関して対称である。この放物線は尖点の内側、C_1 の 2 つの枝の間に位置し、各枝と $x=\frac{1}{2}$ で 1 回ずつ接する。



検算

- $p = 1$、$q = -1$ とする：$P = (1, 1)$、$Q = (1, -1)$ であり、$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 1 - 1 = 0$ である。接線は $2y = 3x - 1$ と $2y = -3x + 1$ であり、C_2 の頂点 $(\frac{1}{3}, 0)$ で交わる。
- $p = 2$、$q = -\frac{1}{2}$ とする：接線 $2y = 6x - 8$ と $2y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{8}$ は $x = \frac{13}{12}$、$y = -\frac{3}{4}$ で交わり、$4y^2 = \frac{9}{4} = 3 \cdot \frac{13}{12} - 1$ が成り立つ。
- 接点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}) \approx (0.5, 0.35355)$ は $4y^2 = \frac{1}{2} = 3x - 1$ を満たし、そこでの両曲線の傾きはともに ≈ 1.06066 である。$pq = -1$ を満たす 10^5 組の無作為な組について計算機で確認したところ、すべての交点が丸め誤差の範囲で C_2 上にあった。

よくある間違い

- $p = 0$ や $q = 0$ を除外し忘れること。$pq = -1$ を得るために割る前に、因数 p^2q^2 が 0 でないことが必要である。
- $p - q$ が 0 でない理由を述べずに $p - q$ で割ること。
- 「$4u^3 - 3u + 1 = 0$ は解をもつ」で止めてしまい、それが $u = t^2 \geq 0$ を与えるかどうかを確かめないこと。解 $u = -1$ は C_1 上のどの点にも対応しない。

STEP のその先へ

曲線 $y^2 = x^3$ は古典的な**尖点 3 次曲線**（cuspidal cubic）である。曲線と媒介変数表示された曲線とを交わらせ、重解から接することを読み取るという手法は、代数幾何学（algebraic geometry）の出発点である。交点重複度（intersection multiplicity）は曲線どうしが何重に交わるかを数えるものであり、ベズー（Bézout）の定理は、3 次曲線と 2 次曲線（conic）は重複度を正しく数えれば 6 点で交わることを述べている。ここでの 6 点は、重解 $t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$（合わせて 4 点）と複素数の組 $t = \pm i$ である。親しみやすい入門書として Kirwan, *Complex Algebraic Curves*（複素代数曲線）がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。