解答例

STEP I 2016、第 9 問

力学 ・ 最大摩擦力でのつり合い

> **STEP I 2016、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s1-q9

鍵となる考え方

点 A のまわりのモーメント（moment）を考える。すると壁で働く二つの力は式から消え、レールでの垂直抗力（normal reaction）が摩擦（friction）を含まない形で θ を用いてただちに求まる。あとは水平方向と鉛直方向に力を分解（resolve）すれば片がつくが、そのためには各摩擦力がどちら向きに働くかを知っておく必要がある。これこそがこの問題の本質である。摩擦力は棒がこれから起こそうとする運動を妨げる向きに働くので、端 A が壁に沿って滑り落ちようとしているのか、それとも滑り上がろうとしているのかを判断しなければならない。

解答

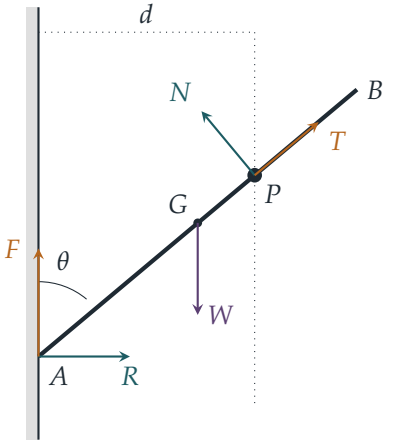
棒を重さ W の一様な（uniform）剛体（rigid body）の棒とみなし、その重心 G は A から距離 a の位置にあるとする。また、レールを固定された直線とみなし、棒とはただ一点 P で接するものとする。A からレールまでの水平距離は d であり、棒は鉛直方向と角 θ をなすから、

$$AP = \frac{d}{\sin\theta}.$$

条件 $a\sin\theta < d$ は、G が A と P の間にあることを意味する。

働く力は次のとおりである。

- A において：水平で壁から離れる向きの垂直抗力 R、および壁に沿った摩擦力 F。
- P において：棒に垂直な垂直抗力 N、および棒に沿った摩擦力 T。
- G に働く重力 W。



F と T の矢印は、以下で扱う第一の場合の向きを示している。

A のまわりのモーメント

N は棒に垂直であるから、A のまわりの N のモーメントは $N \cdot AP$ である。T は棒に沿って働くので A のまわりのモーメントをもたず、R と F も同様である。重力の腕の長さ（lever arm）は $a\sin\theta$ である。よって

$$N\frac{d}{\sin\theta} = Wa\sin\theta \quad \Longrightarrow \quad N = \frac{Wa\sin^2\theta}{d}. \tag{1}$$

これは棒がどちら向きに滑ろうとしていても成り立つ。

どちら向きに滑るか

> **考えてみよう** A は壁に沿って滑り落ちようとしているのか、それとも滑り上がろうとしているのか。

まず、摩擦がまったくないと仮定してみる。鉛直方向に分解すると $N\sin\theta = W$ が必要であり、(1) と合わせるとこれは $a\sin^3\theta = d$ を意味する。ここでは $a\sin^3\theta < a\sin\theta < d$ であるから、(1) より $N\sin\theta < W$ となる。つまり垂直抗力だけでは棒を支えきれず、不足分は摩擦力が補わなければならない。棒は**下向きに**滑ろうとしている。すなわち A が壁に沿って滑り落ち、θ が減少し、$AP = d/\sin\theta$ が増加するので、棒はレールの上を壁に向かって滑り下りる。摩擦力はこれを妨げるので、図のように F は壁に沿って上向きに、T は棒に沿って上向き（B の方向）に働く。両方の接点で限界つり合い（limiting equilibrium）の状態にあるとき、

$$F = \mu R, \qquad T = \lambda N.$$

力の分解

棒に沿って上向きの単位ベクトル（unit vector）は $(\sin\theta, \cos\theta)$ であり、N の向きは $(-\cos\theta, \sin\theta)$（壁に向かい、かつ上向き）である。水平方向に分解すると

$$R - N\cos\theta + \lambda N\sin\theta = 0 \quad \Longrightarrow \quad R = N(\cos\theta - \lambda\sin\theta).$$

（壁が棒を押すためには $R \geq 0$ でなければならないので、この場合には $\tan\theta \leq 1/\lambda$ が必要である。）鉛直方向に分解すると

$$\begin{aligned} W &= \mu R + N\sin\theta + \lambda N\cos\theta \\ &= N\big(\mu\cos\theta - \lambda\mu\sin\theta + \sin\theta + \lambda\cos\theta\big) \\ &= N\big((\lambda+\mu)\cos\theta + (1-\lambda\mu)\sin\theta\big). \end{aligned}$$

(1) の N を代入し、$W\sin^2\theta$ で割ると

$$d\,\mathrm{cosec}^2\theta = a\big((\lambda+\mu)\cos\theta + (1-\lambda\mu)\sin\theta\big),$$

となり、これが求める結果である。

$a\sin\theta > d$ の場合

このとき G はレールより先にある。式 (1) も幾何的な配置も変わらないので、問題は再び滑る向きだけである。

考えてみよう G がレールより先にあることで、何が変わるか。

上の議論から、下向きの滑りは $a\sin^3\theta < d$ のときに、上向きの滑りは $a\sin^3\theta > d$ のときに起こることがわかった。$a\sin\theta < d$ のもとでは前者しか起こりえなかった。$a\sin\theta > d$ のもとでは後者が起こりうるようになる。レールより先に張り出した部分の重さによって $N\sin\theta > W$ となり、棒はレールの上を壁から**離れる**向きに滑り下りようとし、A は壁に沿って上に動く。これが新たな場合であり、このとき二つの摩擦力はどちらも向きが逆になる。すなわち $F = \mu R$ は壁に沿って下向きに、$T = \lambda N$ は棒に沿って下向きに働く。上の計算で λ を $-\lambda$ に、μ を $-\mu$ に置き換えると

$$R = N(\cos\theta + \lambda\sin\theta), \qquad W = N\big((1-\lambda\mu)\sin\theta - (\lambda+\mu)\cos\theta\big),$$

となり、(1) と合わせて

$$d\,\mathrm{cosec}^2\theta = a\big((1-\lambda\mu)\sin\theta - (\lambda+\mu)\cos\theta\big).$$

この場合、$R > 0$ は自動的に成り立つ。（もし $a\sin^3\theta < d < a\sin\theta$ であれば、棒は依然として下向きに滑り出す寸前にあり、第一の結果がそのまま成り立つ。その導出では G の位置をまったく用いていないからである。）

検算

- 摩擦がない場合（$\lambda = \mu = 0$）、どちらの結果も $d = a\sin^3\theta$ に帰着する。これは上で求めた摩擦のないときのつり合いである。
- $\lambda = \tan\alpha$、$\mu = \tan\beta$（摩擦角（angle of friction））とおくと、右辺はそれぞれ $a\sin(\theta+\alpha+\beta)/(\cos\alpha\cos\beta)$ と $a\sin(\theta-\alpha-\beta)/(\cos\alpha\cos\beta)$ になる。二つの場合の違いは、当然そうあるべきとおり、摩擦角の符号だけである。
- $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$、$\theta = \frac{1}{3}\pi$ のとき、二つの場合からそれぞれ $d/a = \frac{3}{8} + \frac{9\sqrt{3}}{32} \approx 0.862$ と $d/a = \frac{9\sqrt{3}}{32} - \frac{3}{8} \approx 0.112$ が得られる。それぞれを上で定めた摩擦力の向きのもとで力とモーメントの式に代入し直すと、合力（resultant）もモーメントも 0 になる。

よくある間違い

- レールからの垂直抗力を鉛直方向とみなしてしまう。棒はレールとただ一点で接しているので、垂直抗力は棒に垂直である。
- モーメントの式で、A からレールまでの距離として $d/\sin\theta$ ではなく長さ d を用いてしまう。
- 棒が実際にどちらへ動こうとするかを考えずに、摩擦力の向きを決めてしまう。

STEP のその先へ

棒は、下向きの限界の場合と上向きの限界の場合の間にある角 θ の区間全体にわたって静止していられる。摩擦があると、つり合いの状態は一つではなく、ある範囲にわたって存在するのである。このような集合（各接点での摩擦円錐（friction cone）や、接点が保持できる状態の集合）を記述することは、接触力学（contact mechanics）やロボット工学における把持の解析の出発点となる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、摩擦と剛体の静力学（statics）を大学 1 年レベルで丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。